



Title	界面ダイナミクス : 曲率の効果
Author(s)	儀我, 美一
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 56, 1-44
Issue Date	1998-01-01
DOI	10.14943/635
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/693 ; http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/0412/
Type	bulletin (article)
File Information	tn58.pdf



[Instructions for use](#)

界面ダイナミクス—曲率の効果

儀我美一

Series #56. October, 1998

界面ダイナミクス — 曲率の効果

儀我美一 (北大・理)

平成10年 9月 24日

1 はじめに

物質の異なる2相が交わずに共存している現象は、今日科学・工学の種々の分野で取り上げられている。2相を隔てる曲面を相境界又は界面という。現象に現れる界面の形は、様々である。どうしてそのような形状になるかを解明するため、昔から多くの科学者が努力してきた。今日、「形態形成の問題」と総称される分野である。例えば、シャボン玉がなぜ球状になるかという問題を考えよう。この場合シャボン玉の表面が界面である。物理的には「界面の囲む図形の体積を一定にしたとき、その表面積を最小にする図形を求めよ。」という「等周問題」の解がシャボン玉の形状と考えられる。等周問題を数学的に解くと、その解は球になるのでシャボン玉の形状は球と説明される。(もちろん、実際には、表面張力以外の力や、境界がありうるので、いつも等周問題としては定式化できるわけではないが、一つの理想的状況をとらえているのである。) 等周問題の解として説明できる現象は、時間が経過しても外部から何も作用を加えない限り、変化しない平衡状態で、さらに、少しぐらいうすっても、やがて元の状態に戻ってしまうという意味で安定である。

我々が現実に見ている界面は、時間とともに動いている遷移過程にある場合が多い。このような状態を非平衡状態という。一見止まっているように見える界面も、長い期間、何千年もかければ変化することがありうる。また、界面が動いている途中に物理的条件が変わって、その形状で固定されてしまったと考えられる場合もある。そこで非平衡状態での界面の形状を調べるのが重要になってくる。

界面の運動(界面ダイナミクス)を理論的に調べるためには、その運動を記述するであろう法則(数理モデル)を導出する必要がある。界面ダイナミクスを記述する

方程式を導出することは、問題の定式化、あるいは、数学的モデル化という。どのようにして導出するかは、重要ではあるが、ここでは述べない¹⁾。界面ダイナミクスを記述するために、現象に応じて様々な非線形偏微分方程式が導出されている。その方程式の解の形状をよく調べれば、界面の動き方がわかっていくのである。ここで注意したいのは、界面の運動そのものが未知であり、求めなければいけない点である。すなわち相境界自身の位置も含めて、問題を解くことになる。数学では、そのような問題を総称して「自由境界問題」と呼んでいる。水と氷の界面ダイナミクスを記述するステファン問題は自由境界問題の典型例で、よく研究されている²⁾⁻⁴⁾。ステファン問題では、界面の運動は界面の外の部分(この場合、水や氷)の物理的状态にもよる。しかし材料科学では、界面の運動法則が界面の形状のみにより決定され、界面の外の部分の物理的状态によらないとしてよい場合も多く、重要である。このようなモデルは界面支配モデルと呼ばれ、その界面ダイナミクスを記述する方程式は曲面の発展方程式と呼ばれる。本稿では、曲面の発展方程式の代表的な例を考え、その方程式中の曲率が、界面の形状におよぼす効果について述べていく。

まず、問題を数学的に記述するために記号を準備しよう。時刻 t での界面を $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ に埋め込まれた(滑らかな)超曲面 $\Gamma(t)$ と考えよう。また $\Gamma(t)$ にはふち(幾何学的境界)がないとしよう。 $\Gamma(t)$ は向きづけ可能とし、 \mathbf{R}^n を二つの開集合に隔てているとする。 $(\Gamma(t))$ が閉曲面なら、ジョルダン・ブラフワールの定理^{*)} よりいつもこれらの条件を満たしている。^{*)} 脚注: 小松, 中岡, 菅原, 位相幾何学 I 岩波(1967) 参照) 次に \mathbf{n} を $\Gamma(t)$ の向きを定める単位法ベクトル場とし、 $V = V(x, t)$ を $\Gamma(t)$ の点 x での \mathbf{n} 方向の成長速度とする。界面ダイナミクスが動力的な作用によらないとすると、運動を記述するのに加速度は不必要と考えられる。熱力学的力による界面ダイナミクスでは、実際、成長速度 V が $\Gamma(t)$ の形状および $\Gamma(t)$ の外側の物理的状态で決定される⁵⁾。さらに、界面支配モデルでは、 $V = V(x, t)$ が $\Gamma(t)$ の形状と空間変数 x 時間変数 t にのみよって決定される。もし V が x, t に陽によらなければ、その曲面の発展方程式は、標語的には $\Gamma(t)$ 上で

$$V = f(\Gamma(t) \text{ の形状}) \quad (1)$$

と表される⁶⁾。ここで f は既知関数である。(この方程式を成長法則と呼ぶこともある。) 与えられた初期曲面、 $\Gamma(0) = \Gamma_0$ に対して (1) を満たす $\Gamma(t)$ の一径族 $\{\Gamma(t); t \in [0, T]\}$ を (1) の初期曲面 Γ_0 に対する時間区間 $(0, T)$ での解という。 $T = \infty$ ととれ

るとき大域解という。 Γ_0 に応じて T を小さくしなければいけないような時は、局所解という。(1) に対しての解析学的な基本的問題は、

- (i) Γ_0 を与えたとき (1) の滑らかな局所解、大域解は一意に存在するか。
- (ii) 滑らかな大域解が存在しない場合、局所解は、本当に滑らかさを失うのか。
- (iii) 解の形状は、 Γ_0 の形状を反映するのか。あるいは Γ_0 によらずにある形状になっていくのか。

これらは、方程式 (1) が与えられたときに、まず考える必要のある問題である。その意味で基本的である。

さて、成長法則 (1) での、 $\Gamma(t)$ の形状依存性であるが、 $\Gamma(t)$ のまがり方によることが多い。曲線のまがり方を表す量として、曲率を用いる。曲面の場合は、第2基本形式やその固有値である主曲率など、さまざまな量が用いられている。成長法則 (1) の右边が曲がり方による場合、曲率が大きい、つまり $\Gamma(t)$ が大きく曲つていると、それを平らにするような効果が (1) にあることが多い。言い換えると界面ダイナミクスにおける曲率の効果は、 $\Gamma(t)$ がさらに複雑な形になるのを食い止める作用ともいえる。従って、曲率の効果は、平滑化、安定化因子と見なされている。

成長法則 (1) が、拡散型方程式になっている場合には、上述のような曲率の効果がある。拡散型方程式は、熱伝導の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, x \in \mathbf{R} \quad (2)$$

の一般化であり、数学的には、放物型偏微分方程式と呼ばれる。方程式 (2) の代わりに (1) に u の非線形関数 $g(u)$ を加えた方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(u)$$

は、反応項 g をもつ反応拡散方程式と呼ばれる。未知関数 u について線形である拡散項 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ と非線形項 g の二つの効果のおりなす様々な現象について、(特に u がベクトル値の場合) 日本の反応拡散方程式系の研究グループによる寄与が大きい。成長法則 (1) にも拡散の効果を表す曲率の項と、反応項のような項の相互作用が、面白い現象を生み出すことがある。しかし、成長法則 (1) の場合拡散項といっても、それ自身非線形で多様である。ここでは、成長法則 (1) のいくつかの代表的な例について、曲率の種々の効果を調べることにより、非線形放物型方程式の拡散効果の多様性を紹介したい。

2 界面支配モデルの種々の例

成長法則 (1) で f が曲率による代表的な例をいくつかあげよう。

2.1 平均曲率流方程式

まず $\Gamma(t)$ の点 x の \mathbf{n} 方向の平均曲率を $H = H(x, t)$ と書く。平均曲率は、通常主曲率の平均として定義されるが、本稿では単に主曲率の和とする。(従ってその値は平均で定義した場合の $n-1$ 倍になる。) $\Gamma(t)$ の方程式で、 $\Gamma(t)$ の点 x での成長速度 $V(x, t)$ がそこでの平均曲率 $H(x, t)$ に等しいことを要請している方程式、つまり

$$V = H \quad (\Gamma(t) \text{ 上}) \quad (3)$$

を平均曲率流方程式と呼ぶ。もし $n=2$, つまり $\Gamma(t)$ が平面内の曲線であるときは、 $\Gamma(t)$ の \mathbf{n} 方向の曲率を k と書くと、平均曲率方程式は、単に

$$V = k \quad (4)$$

となる。この方程式を曲線短縮方程式と呼ぶこともある。

平均曲率流方程式は、金属の焼きなまし時の粒界の運動を記述するために材料科学者の Mullins (マリンス)⁷⁾ によって 1950 年代に提唱された。1970 年代の後半の Brakke (ブラッケ)⁸⁾ の研究をきっかけに、平均曲率流方程式は、数学の世界でも盛んに研究されるようになってきた。ここでは、その研究の歴史^{5),9)} についてはふれず、方程式の数学的意味、また方程式の型についてまず述べよう。

A. 変分構造

まず、平均曲率 H は表面積の曲面の変化に対する微分 (曲面の族の全体が無次元なので変分と呼ぶ) として特徴づけられることに注意しよう。実際滑らかな曲面 Γ が $n-1$ 変数関数 u のグラフ $x_n = u(x')$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega$ で与えられたとき、その表面積 $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)$ は

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx' \quad (5)$$

で与えられる。ここで Ω は \mathbf{R}^{n-1} の開集合で ∇u は $n-1$ 変数関数の勾配

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} \right)$$

を表し、 $|\nabla u|^2$ は ∇u のベクトルとしての長さ、つまり

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right)^2$$

を表す。今 ε を小さい正数、 φ を Ω でコンパクトな台をもつ滑らかな関数とし、 $\varepsilon\varphi$ だけ Γ を x_n 方向に動かして得られる曲面を $\Gamma_{\varepsilon\varphi}$ 、つまり

$$\Gamma_{\varepsilon\varphi} = \{x_n = u(x') + \varepsilon\varphi(x'), x' \in \Omega\}$$

と表す。このとき表面積 Γ の φ 方向の変化率 $\delta\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)/\delta\varphi$ を

$$\frac{\delta\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)}{\delta\varphi} = \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma_{\varepsilon\varphi})|_{\varepsilon=0}$$

と定義する。定義に従って、右辺を積分記号下の微分が自由にできるとして形式的に計算すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma_{\varepsilon\varphi})|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Omega} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \cdot \nabla \varphi \, dx' \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) \varphi \, dx' \end{aligned}$$

となる。最後の式変形で、部分積分法を用いた。ここで中点はユークリッド内積、 div は \mathbf{R}^{n-1} のベクトル場についての発散

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F^1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F^{n-1}}{\partial x_{n-1}}, \quad F = (F^1, \dots, F^{n-1})$$

を表す。 Γ の上向き法ベクトル方向の平均曲率を計算すると⁹⁾

$$H = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) \quad (6)$$

であるので

$$\frac{\delta\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)}{\delta\varphi} = - \int_{\Omega} H \varphi \, dx' \quad (7)$$

を得る。(ベクトル解析の記号に不慣れの読者は、まず $n=2$ 、つまり Γ が曲線で u が 1 変数関数のときの計算に取り組むとよい。その場合 $k = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} / (1 + (\frac{\partial u}{\partial x_1})^2)^{1/2} \right)$ なのでもちろん

$$\frac{\delta\mathcal{H}^1(\Gamma)}{\delta\varphi} = - \int_{\Omega} k \varphi \, dx_1 \quad (8)$$

となる。) 有限次元ベクトル空間で定義された関数 E のベクトル $e \neq 0$ 方向の方向微分 $\partial E/\partial e$ と全微分 $E'(y)$ の関係

$$\frac{\partial E}{\partial e}(y) = \frac{d}{d\varepsilon} E(y + \varepsilon e)|_{\varepsilon=0} = E'(y) \cdot e$$

の類似で、積分 $\int H \varphi$ を H と φ の内積とみなせば (8) は $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)$ の Γ での‘全微分’ $\delta\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)/\delta\Gamma$ が

$$\frac{\delta\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)}{\delta\Gamma} = -H \quad (9)$$

となることを主張していると読める。ところで物体の運動速度を物体の位置の時間変化率で表すが、その大きさは、単位系によって異なる。つまり、微分は、基準となる計量、内積によって異なりうる。2 関数の内積として上述でない物を用いると $\delta\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)/\delta\Gamma$ は異なる量になる。後に述べる表面拡散流方程式を考える場合、この注意は実際重要になる。公式 (9) は、 $-H$ が Γ を \mathbf{n} 方向に動かしたときの表面積の (Γ の囲む図形の体積変化に対する) 変化率であることを主張しているとも読める。

以上の考察により平均曲率流方程式は

$$V = -\delta\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma(t))/\delta\Gamma(t) \quad (10)$$

と表面積を ($\Gamma(t)$ の $-\mathbf{n}$ 方向の体積変化に対して) 最も減らすように $\Gamma(t)$ を動かすことを要請している方程式といえる。関数や (曲面) に対して実数値を対応させる関数を、変数とする関数という意味で汎関数という。表面積は曲面を変数とする汎関数の例である。この汎関数が最も減っていく方向に動かしていくことを要請している方程式を勾配流方程式ということが多い。平均曲率流方程式は勾配流方程式の典型例である。汎関数の値を高さに例え、そのグラフを地形と思うと、勾配流方程式は、最も急なスロープにそって谷のほうにすべっていくことを要請しているともいえる。何らかな意味で勾配流方程式とみなせる場合、その方程式は変分構造をもつということが多い。ところで曲線についての (4) を曲線短縮方程式と呼ぶのは、曲線の長さを最も減らしていくような勾配流方程式としての構造をもっているからである。多様体上の曲線短縮方程式で、その解 $\Gamma(t)$ が時間無限大まで存在することがある。その時間無限大での極限は、存在すれば測地線であるので、多様体上で閉測地線を構成するのに用いられることがある¹⁰⁾。

B. 方程式の型

方程式 (3) は偏微分方程式としてはどの型 (楕円型, 双曲型, 放物型, ...) に分類されるのであろうか。そのために (3) を座標を用いて書き下してみよう。 $\Gamma(t)$ が (x', t) を変数とする関数 u のグラフとして与えられているとしよう。つまり

$$\Gamma(t) = \{x_n = u(x', t), x' \in \Omega \subset \mathbf{R}^{n-1}\}$$

とする。(方程式が回転不変のため, 局所的にこのように表現できると仮定して一般性を失わない。) $\Gamma(t)$ の単位法ベクトル \mathbf{n} で上方を向いている方は u を用いて

$$\mathbf{n} = \frac{(-\nabla u, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \quad (11)$$

と表される。 V は各点の x_n 方向の速度ベクトル $(0, \dots, 0, \frac{\partial u}{\partial t})$ の \mathbf{n} 方向への正射影とみなせるので

$$V = \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \quad (12)$$

となる。ここで (6) による H の表現を用いると (3) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \quad (13)$$

という型になる。少なくとも未知関数やその微分に関して非線形である。発散を実際に計算してみると (13) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (1 + |\nabla u|^2)^{-1} \quad (14)$$

($\Delta = \operatorname{div} \nabla$ はラプラシアンを表す)

となる。こうしてみると, 方程式中の最高階の微分は2階であり, 未知関数 u の2階導関数について線形なので (14) は準線形な2階偏微分方程式である。そこで (14) を

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

と表すと

$$a_{ij}(p_1, \dots, p_{n-1}) = \delta_{ij} - p_i p_j (1 + |p|^2)^{-1}, \quad 1 \leq i, j \leq n-1$$

$$p = (p_1, \dots, p_{n-1})$$

となる。 δ_{ij} はクロネッカーのデルタで $\delta_{ii} = 1, i \neq j$ なら, $\delta_{ij} = 0$ である。ここで作用素の楕円型の定義を復習しよう。

定義 P を $2m$ 階 ($m = 1, 2, \dots$) の実定数係数の d 変数関数に作用する微分作用素とする。 P_0 を P の最高階の部分からなる作用素 (主要部という) とする。もし P_0 の特性多項式

$$p_0(\xi) = e^{-\xi \cdot x} P_0(e^{\xi \cdot x}) (-1)^m, \quad x \in \mathbf{R}^d$$

に対して $p_0(\xi) > 0$ がすべての 0 ベクトルでない $\xi \in \mathbf{R}^d$ についていえるとき P を楕円型という。 p_0 は P の主シンボルと呼ばれている。また特性多項式は P の各偏微分を $\xi \sqrt{-1}$ に置き換えた多項式と考えてもよい。

もちろんラプラス作用素

$$-\Delta = -\operatorname{div} \nabla = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

は $p_0(\xi) = |\xi|^2$ となる楕円型作用素である。また $P = \Delta^2 = \Delta \Delta$ も $p_0(\xi) = |\xi|^4$ となる楕円型作用素である。非線形作用素については, 楕円性が作用される関数の値, 微分にもよりうる。

定義 (非線形作用素について) 点 $x \in \mathbf{R}^d$ と $\partial^\alpha u(x) (|\alpha| \leq 2m)$ の値によって決まる関数

$$F(x, \{\partial^\alpha u(x)\}_{|\alpha| \leq 2m})$$

が $(x_0, \{\partial^\alpha u(x_0)\}_{|\alpha| \leq 2m})$ で楕円型とは, F を $(x_0, \{\partial^\alpha u(x_0)\}_{|\alpha| \leq 2m})$ のまわりで線形化して得られる作用素の主要部, つまり

$$P_0 = \sum_{|\alpha|=2m} \frac{\partial F}{\partial (\partial^\alpha u)} (x_0, \{\partial^\beta u(x_0)\}_{|\beta| \leq 2m-1}, \partial^\alpha u(x_0)) \partial^\alpha,$$

が楕円型であるときをいう。この概念は座標変換によらない。

ここでは多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ を用いている。したがって $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ とし, ∂^α は

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\alpha_d}$$

を表す。さて F が最高階の偏導関数の $\partial^\alpha u(|\alpha| = 2m)$ について線形ならば、 $F(x, \{\partial^\alpha u\}_{|\alpha| \leq 2m})$ は準線形と呼ばれる。 $m = 1$ で準線形な F 、つまり未知関数の2階微分について線形な作用素が、楕円型かどうかは、その係数の作る行列に対応する2次形式が常に負定値かどうかで決まる。この概念は座標変換によらないので、特定の座標で調べればよい。

さて方程式 (14) の右辺の作用素が楕円型かどうか調べよう。シュワルツの不等式を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(p) \xi_i \xi_j &= |\xi|^2 - \frac{(p \cdot \xi)^2}{1 + |p|^2} \geq |\xi|^2 \left(1 - \frac{|p|^2}{1 + |p|^2}\right) \\ &= |\xi|^2 \frac{1}{1 + |p|^2}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \end{aligned}$$

を得る。こうして p を決めるごとに

$$-\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(p) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

は楕円型作用素で、行列 $a_{ij}(p)$ の最小固有値は p を大きくするほど小さくなる。方程式 (14) は $\frac{\partial u}{\partial t} + 2$ 階楕円型作用素 $= 0$ なので準線形2階放物型方程式の例となっている。(放物型の統一的な定義はないので感覚的に用いる。)

方程式 (3) が準線形放物型方程式ということがわかると平均曲率流方程式の局所解を構成することは今日では標準的である⁹⁾。初期曲面 Γ_0 がある程度滑らかなら、解 $\Gamma(t)$ も滑らかである。

C. 具体的な解

平均曲率流方程式はその非線形性のため、いくつかの特別な場合を除いてその具体的な解の表示を求めることは、難しい。しかし、球面や円柱面のように、平均曲率が一定になる図形を (3) で動かした解を求めることは、易しい。実際 Γ_0 が半径 R_0 (中心原点) の球ならば解 $\Gamma(t)$ は半径 $R(t)$ (中心原点) の球面で

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2(n-1)t}$$

となる。この解は時間とともに半径が小さくなり $t_* = R_0^2/2(n-1)$ で $\Gamma(t_*)$ は1点となる。その後が空集合であると考えるのが自然であろう。円柱面についても同様な解の表示が得られる⁹⁾。

D. 等周不等式への応用

第1節で述べた等周問題で界面が平面内の閉曲線の場合を考えよう。この場合が古典的な等周問題である。閉曲線の長さを L 、それが囲む図形の面積を A とする。閉曲線が円周であるなら、 L と A の関係は明らかに $4\pi A = L^2$ である。 A を一定としたとき、閉曲線が円周のとき L を最小にするのであれば

$$4\pi A \leq L^2$$

であるはずである。この不等式を等周不等式という。これは等周問題の解が円周で与えられることを示す。実は不等式の等号は閉曲線が円周のときのみ実現される。つまり、等周問題の解は円周しかないのである。等周不等式の証明法はいくつも知られている¹¹⁾。ここでは、曲線短縮方程式 (4) を用いて証明する。技術的困難さを避けるため、閉曲線 Γ_0 を滑らかとする。 A_0 を Γ_0 の囲む図形の面積とし、 L_0 を Γ_0 の長さとする。

定理 $4\pi A_0 \leq L_0^2$ が常に成立する。等号は Γ_0 が円周の場合に限る。

証明 Γ_t を Γ_0 を初期値とする (4) の解とする。 $\Gamma(t)$ の長さを $L(t)$ 、その囲む図形の面積を $A(t)$ とする。(後述するように、この解はやがて凸になり有限時間で1点に縮むまで、特異点を生じたり交わったりしないことが知られている。) まず、成長速度の定義より

$$\frac{dA}{dt}(t) = - \int_{\Gamma(t)} V ds \quad (15)$$

となる。ここで V は、 $\Gamma(t)$ の内向き単位法ベクトル \mathbf{n} 方向の成長速度、 ds は線素 $d\mathcal{H}^1$ を表す。また

$$\frac{dL}{dt}(t) = - \int_{\Gamma(t)} V k ds \quad (k \text{ は } \Gamma(t) \text{ の } \mathbf{n} \text{ 方向の曲率}) \quad (16)$$

となる。これらの恒等式は局所化によって曲線が関数のグラフの場合に示せばよいのでその導出は曲線の幾何⁵⁾を理解していなくても可能である。さて曲率 k は \mathbf{n} の偏角 θ の弧長パラメータ s に対する微分 $\frac{\partial \theta}{\partial s}$ (s は \mathbf{n} を左手に見る方向に増加するようにとられている) なので

$$\int_{\Gamma(t)} k ds = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \theta}{\partial s} ds = 2\pi \quad (17)$$

を得る。(この事実と (15) で $V = k$ とすると

$$A(t) = A_0 - 2\pi t$$

が得られるので $\Gamma(t)$ が時刻 $t_* = A_0/2\pi$ で消滅することがわかる。)

これらの準備の上で、等周不等式の証明を完成させよう。恒等式 (15) で $V = k$ とし、(17) を用いると

$$4\pi \frac{dA}{dt}(t) = -2 \left(\int_{\Gamma(t)} k \, ds \right)^2$$

を得る。シュワルツの不等式

$$\left(\int_{\Gamma(t)} k \, ds \right)^2 \leq \int_{\Gamma(t)} k^2 \, ds \cdot L(t)$$

を用い、さらに (16) を $V = k$ として用いると

$$\begin{aligned} 4\pi \frac{dA}{dt}(t) &\geq -2 \int_{\Gamma(t)} k^2 \, ds L(t) \\ &= 2 \frac{dL}{dt} \cdot L = \frac{d}{dt}(L^2) \end{aligned}$$

両辺を $(0, t_*)$ で積分すると

$$4\pi(A(t_*) - A_0) \geq (L(t_*))^2 - L_0^2$$

となるが、 $A(t_*) = 0, L(t_*) = 0$ なので等周不等式が得られる。さて、それが等号になるためにはシュワルツの不等式が等式で成立しなければならないので各時刻 $t \in (0, t_*)$ で $\Gamma(t)$ の曲率は空間変数によらない。つまり $\Gamma(t)$ は円周である。これより Γ_0 は円周でなければならない。(証明終)

このように、曲線短縮方程式は、等周不等式のような幾何学的不等式を証明するのに重要で、曲面上の等周不等式の精密化に役立っている¹²⁾。また最近、相対論の正質量問題の精密化であるペンローズの不等式も曲面の発展方程式 $V = -1/H$ を用いることにより厳密に証明された¹³⁾。

2.2 非等方的平均曲率流方程式

結晶成長の問題では、界面構造の方向による異方性を考慮しなければならない。一方向には結晶は成長しやすいが、他の方向には成長しにくいという現象を説明す

るためである。そのためまず表面エネルギーと呼ばれる量を考えよう。 γ_0 を \mathbf{R}^n の単位球面 S^{n-1} 上で定義された正定値関数とする。曲面 Γ に対して

$$I(\Gamma) = \int_{\Gamma} \gamma_0(\mathbf{n}) d\mathcal{H}^{n-1} \quad (d\mathcal{H}^{n-1} \text{ は面素を表す}) \quad (18)$$

を (表面エネルギー密度 γ_0 の) Γ の表面エネルギーと呼ぶ。表面エネルギー密度 γ_0 は、結晶構造によって決まると考えられている。もちろん γ_0 が恒等的に 1 の場合は $I(\Gamma)$ は Γ の表面積 $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)$ にほかならない。

A. 変分構造

非等方平均曲率流方程式は大雑把に言えば平均曲率流方程式 (10) の表面積を表面エネルギーに置き換えて得られる方程式といえる。ただし同じ $\delta I(\Gamma(t))/\delta \Gamma(t)$ に対しても方向によって成長速度 V が異なると考えたほうが自然なので \mathbf{n} による比例定数 $M(\mathbf{n})$ を導入して

$$V = -M(\mathbf{n}) \frac{\delta I(\gamma(t))}{\delta \Gamma(t)} \quad (19)$$

を (10) の一般化として考える。それでは変分 $\delta I(\Gamma)/\delta \Gamma$ は、どのような量なのであろうか。§2.1.A と同じように計算すると

$$\frac{\delta I(\gamma(t))}{\delta \Gamma(t)} = \operatorname{div}_{\Gamma} \xi(\mathbf{n})$$

を得る。ここで γ を γ_0 の正斉次一次拡張、すなわち

$$\gamma(q) = \gamma_0 \left(\frac{q}{|q|} \right) |q|, \quad q \in \mathbf{R}^n$$

とし、

$$\xi = \nabla \gamma = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial q_n} \right)$$

とおいた。 $\operatorname{div}_{\Gamma}$ は Γ 上の発散であるが、 ξ の斉次性より、 \mathbf{n} が Γ のある近傍に長さ 1 に拡張できているのであれば、 \mathbf{R}^n での発散 div を用いて

$$\operatorname{div}_{\Gamma} \xi(\mathbf{n}) = \operatorname{div} \xi(\mathbf{n})$$

と表される。もちろん、 $\gamma_0(q) \equiv 1$ のときは $\xi(q) = q/|q|$ なので、 $\operatorname{div} \xi \mathbf{n} = \operatorname{div} \mathbf{n}$ となる。(6),(11) より $H = -\operatorname{div} \mathbf{n}$ であることに注意すれば $-\operatorname{div}_{\Gamma} \xi(\mathbf{n})$ が平均曲率の概念の一般化であると考えられる。そこで

$$H_{\gamma_0} = -\operatorname{div}_{\Gamma} \xi(\mathbf{n}) \quad (20)$$

とおき、重みつき平均曲率又は非等方的平均曲率と呼ぶ。すると (19) 式は

$$V = M(\mathbf{n})H_{\gamma_0} \quad (21)$$

と表される。この方程式は熱力学の第2法則と力の釣り合いを仮定して公理的に導かれた⁵⁾ 界面運動方程式

$$\beta(\mathbf{n}, V)V = H_{\gamma_0} - c$$

の特別な場合と考えられる。(ここで $\beta(\mathbf{n}, V) \geq 0$, c は定数である。) 実際 (21) は $\beta(\mathbf{n}, V) = 1/M(\mathbf{n})$, $c = 0$ とした方程式にほかならない。

B. 方程式の型とフランク図形

方程式 (21) の偏微分方程式としての型を調べよう。§2.1.B のような座標を用いて (21) を書きなおしていけばよいのであるが、異方性のため方程式の型が法ベクトル \mathbf{n} 方向によって異なりうる。ここでは結果のみを紹介したい。そのためには γ_0 のフランク図形

$$\text{Frank}\gamma_0 = \{q \in \mathbf{R}^n; \gamma(q) \leq 1\}$$

を用いると表現しやすい。等方的で $\gamma_0 \equiv 1$ であれば、Frank γ_0 は単位球である。Frank γ_0 の境界の (内向き) 主曲率がいたるところ正である場合、(21) は平均曲率流方程式と同様、 \mathbf{n} の方向によらず2階放物型方程式である。 γ の条件として解析的に表現すると「ある $\lambda > 0$ が存在して

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial q_i \partial q_j}(q) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad (22)$$

が互いに直交する $\xi, q \in \mathbf{R}^n$ に対して成立する」となる。 $(\gamma$ は $q \neq 0$ では C^2 と仮定している。) Frank γ_0 が単に凸という仮定であると、上の λ を $\lambda = 0$ ととらなければならない方向 q がありえる。したがって放物性が退化しうるのである。しかし放物型方程式の「極限」とみなせるので (21) は退化放物型方程式と呼ばれる。Frank γ_0 が凸でない場合は、(21) は退化放物型方程式ともみなせない。 q の方向によっては、方程式の構造は熱方程式の時間を正負入れ換えたような構造になっていて、一般には初期値問題は解けない。退化性について $n = 2$ の場合少し論じよう。Frank γ_0 が単位円からその直径より短い一つの弦でくぎられた部分で中心を含まない方を取り去ってできる図

形としよう (図1)。弦と円との交点の座標を $q_1 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1)$, $q_2 = (\cos \theta_2, \sin \theta_2)$ と表し、 $\theta_1 < \theta_2$, $\theta_2 - \theta_1 < \pi$ となるように θ_1, θ_2 をとっておく。(このときの γ は C^2 でも C^1 でもないが、とりあえずそのような滑らかさの問題は、考えないことにする。) 対応する方程式は $\theta_1 < \theta < \theta_2$ に対応する方向 $q = (\cos \theta, \sin \theta)$ で、放物性が退化していることは容易にわかる。もとの方程式 (21) に戻ると、これは曲線 $\Gamma(t)$ の単位法ベクトル場 \mathbf{n} の偏角 θ が $\theta_1 < \theta < \theta_2$ のとき、(21) の放物性が退化していることと同値である。 $(M(\mathbf{n}) > 0$ はいつも仮定されている。)

さて、この例のように Frank γ_0 が尖っている場合は、 γ の2階微分は δ 関数的になり、方程式 (21) を普通の意味で解釈することはできない。しかし、このような状況を考えることは応用上重要である⁵⁾。この種の問題については、本稿の最終節で扱う。

C. 非等方的等周問題とウルフ図形

等周問題で、表面積を表面エネルギー I ((18) 式参照) に置き換えた問題、つまり「界面の囲む図形の体積を一定にしたとき、その表面エネルギー I を最小にする図形を求めよ。」を非等方的等周問題という。もちろん等周問題の一般化である。この問題の解は結晶の平衡形を記述するものとして重要である。等周問題の解が球になるのは想像に難くないが、非等方の場合、すぐにはわからない。実際、この解は最初に Wulff (ウルフ) によって与えられたので表面エネルギー密度 γ_0 に対応したウルフ図形と呼ばれている。それは

$$\text{Wulff } \gamma_0 = \{x \in \mathbf{R}^n; x \cdot q \leq \gamma_0(q) \text{ がすべての } q \in \mathbf{R}^n, |q| = 1 \text{ について成立}\}$$

で定義される。(凸解析の用語を用いると Wulff γ_0 は Frank γ_0 の共役凸集合として定義されるといってもよい。) 本稿ではウルフ図形が非等方等周問題の解であることについては触れない¹⁴⁾。

ウルフ図形はフランク図形が凸でなくてもその定義よりいつも凸である。実は γ_0 が異なっても、そのフランク図形の凸包が一致していればウルフ図形は変わらない。そこで凸なフランク図形を考えよう。もし、Frank γ_0 の境界が C^2 で、その内向き主曲率がいたるところ正なら、Wulff γ_0 の境界も同じ性質をもつ。これに対し、前節の例のような形状のフランク図形で与えられる γ_0 に対しては、そのウルフ図形は単位円に q_1, q_2 での接線と弧 $q_1 q_2$ が囲む部分をつけ加えた図形である (図

1)。フランク図形の平らな部分の法線方向がウルフ図形のカドの位置ベクトルの方向になっている。またウルフ図形の平らな部分（ファセットと呼ぶ）の法線方向が、フランク図形のカドの位置ベクトルの方向になっていることがわかる。標語的には、 $n = 2$ のときは、

$$\begin{aligned} \text{カド} &\longleftrightarrow \text{平らな面} \\ \text{平らな面} &\longleftrightarrow \text{カド} \\ \text{フランク図形} &\longleftrightarrow \text{ウルフ図形} \end{aligned}$$

といえる。

さて、ウルフ図形は、期待されるように、次のような球に似た性質をもつ。ウルフ図形にカドがあつたりファセットがあると記述が困難になるので、Frank γ_0 の境界が C^2 で、その内向き主曲率がすべて正として述べる。

定理 Wulff γ_0 の境界 Γ の外向き非等方的平均曲率 H_{γ_0} は定数で $-(n-1)$ となる。

証明 ウルフ図形の定義よりその境界 Γ 上の点 x では

$$\sup_{|q|=1} (x \cdot q - \gamma_0(q)) = 0$$

となることは容易にわかる。この条件は γ の斉次性より

$$\sup_{q \in \mathbf{R}^n} (x \cdot q - \gamma(q)) = 0$$

と同値である。 γ の凸性の仮定 (22) より、 $x \cdot q - \gamma(q)$ は q の関数として q の正定数倍を除いてただ一つ最大値をとる。最大にする点 $q(x)$ は $x = \nabla \gamma(q) = (\frac{\partial \gamma}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial q_n})$ かつ $|q| = 1$ を満たすものとしてただ一つ決まる。 $q(x)$ は Γ 上でしか定義されていないが、各 $\mu > 0$ に対して $q(\mu x) = \mu q(x)$ を満たすように q を Γ の外に拡張する。すると Γ は

$$x \cdot q - \gamma(q(x)) = 0$$

なる方程式で与えられる。この式の左辺の勾配は Wulff γ_0 の外向き法ベクトルを与えるがその j 成分は $x = \nabla \gamma(q)$ より

$$q^j(x) + x \cdot \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) - \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \gamma}{\partial q^\ell} \frac{\partial q^\ell}{\partial x_j} = q^j(x)$$

となる。こうして Wulff γ_0 の外向き単位法ベクトル場を $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ とすると

$$x = \nabla \gamma(\mathbf{n}(x)), \quad x \in \Gamma = \partial W_{\gamma_0}, \quad W_{\gamma_0} = \text{Wulff } \gamma_0$$

を得る。こうして

$$H_{\gamma_0} = -\text{div}_\Gamma \nabla \gamma(\mathbf{n}(x)) = -\text{div}_\Gamma x$$

を得る。ここで Γ 上の発散の定義¹⁵⁾

$$\text{div}_\Gamma X = \text{trace}((I - \mathbf{n}(x) \otimes \mathbf{n}(x)) \nabla X)$$

を思い出すと

$$H_{\gamma_0} = -(n-1)$$

を得る。ここで $X = (X^1, \dots, X^n)$ は Γ 上で定義されたベクトル場で（接ベクトル場とは限らない） \mathbf{R}^n 値関数とみなせる。 ∇X は $n \times n$ 行列 $(\frac{\partial X^i}{\partial x_j})_{1 \leq i, j \leq n}$ を表し $p \otimes p$ は n ベクトル $p = (p_1, \dots, p_n)$ とそれ自身のテンソル積を表す。 $p \otimes p$ は i, j 成分が $p_i p_j$ である $n \times n$ 行列と同一視している。 trace は行列のトレースつまり対角成分の和を表す。□

ところで平均曲率 $H = -(n-1)$ となる埋め込まれた閉曲面は単位球であることはよく知られていて¹⁶⁾、そこでの折り返し法は2階楕円型放物型方程式の研究で重要な役割を演じている。重みつき平均曲率の場合、 $H_{\gamma_0} = -(n-1)$ なる埋め込まれた閉曲面は Wulff γ_0 の境界に限るのであろうか。 $n = 2$ の場合は容易であるが一般には未知であると思われる。

さて、Wulff の境界の H_{γ_0} が一定であることより重みつき平均曲率流方程式の具体的な解の例を与えることができる。

D. 具体的な解, 自己相似解

今 $T > 0$ として

$$\Gamma(t) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n; \frac{x}{\lambda(t)} \in \partial W_{\gamma_0} \right\} =: \lambda(t) \partial W_{\gamma_0}$$

なる曲面の族を考えよう。これは Wulff 図形 W_{γ_0} を時間とともに $\lambda(t)$ 倍拡大してできる曲面族でこの図形の点 $x \in \Gamma(t)$ の方向は $\xi(\mathbf{n}(x))$ の方向と一致しているので

$\xi(\mathbf{n})$ 方向の速度は $d\lambda(t)/dt$ となる。 γ の正斉次一次性より

$$\gamma(p) = \xi(p) \cdot p \quad (\text{Euler の同次方程式})$$

なので, $\Gamma(t)$ の \mathbf{n} 方向の速度 V は

$$V = \gamma(\mathbf{n}) \frac{d\lambda}{dt}$$

となる。一方, $\Gamma(t)$ の重みつき平均曲率 H_{γ_0} は $-(n-1)/\lambda(t)$ である。したがってもし λ が

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{n-1}{\lambda} \quad (23)$$

の解であれば, $\Gamma(t)$ は

$$V = \gamma_0(\mathbf{n}) H_{\gamma_0} \quad (24)$$

の解つまり (21) で $M = \gamma_0$ とした方程式の解になる。(23) は積分可能で $\lambda(0) = R_0 > 0$ とすると

$$\lambda(t) = \sqrt{R_0^2 - 2(n-1)t}$$

を得る。 $\gamma_0 \equiv 1$ の場合の $V = H$ の解である球面解を一般化した解がこうして得られる。ここで得られた $\Gamma(t)$ は, W_{γ_0} を縮小して得られるので縮んでいく自己相似解と呼ばれる。平均曲率流方程式の場合は, 凸な曲面は, 凸のまま 1 点に縮みその縮み方は球の縮み方で近似できる (漸近的に一致する。) ¹⁷⁾ 方程式 (24) についての解の縮み方については, γ が仮定 (22) を満たす場合であっても, $n = 2$ の場合 ¹⁸⁾ を除いて未知である。非等方的な場合は鍵となる単調公式が成立しない ¹⁹⁾ ことによる。

さて, (21) で M が γ_0 に比例している場合は, 同じ考え方で縮んでいく自己相似解がみつかるが, 一般の場合には, 曲面 C と $\lambda(t)$ を $\lambda'(t) < 0$ となるようにうまくとつても

$$\Gamma(t) = \lambda(t)C \quad (25)$$

と表せる解 (縮んでいく自己相似解) は存在するのであろうか。 $n = 2$ の場合に次のことが知られている以外は不明である。

定理 ^{18), 20)} $n = 2$ となる γ_0 が C^2 で仮定 (22) を満たしているとする。 M が連続とする。このとき閉凸曲線 C をうまくとると

$$\Gamma(t) = \sqrt{T-t}C, \quad T > 0$$

と表せる自己相似解が存在する。 $M(p) = M(-p)$, $\gamma(p) = \gamma(-p)$ がすべての $p \in S^1$ について成立すると仮定すると, C は T を決めればただ一つ決まる。

後半の M, γ についての条件は, (21) で与えられる運動法則が, $\Gamma(t)$ の向きづけによらないことを保証している。なお最近 γ_0 の Frank 図形が凸多角形の時この定理と同様なことが成立することが示されている ²¹⁾。

ところで, §2.1.D の方法で (24) を用いて非等方的等周問題に対応する不等式は導けないのであろうか。すなわち閉曲線 Γ_0 の囲む面積を A_0 , Γ_0 の表面エネルギーを I_0 としたとき

$$4WA_0 \leq I_0^2$$

を §2.1.D の方法で示せないのであろうか。ここで W は Wulff 図形の面積を表す。残念ながら §2.1.D をそのまま拡張したのでは, うまくいかない。しかし, 等号が γ_0 の Wulff 図形 W_{γ_0} で成立することを見るのは容易である。実際平面上では $\text{div } x = 2(x \in \mathbf{R}^2)$ なので

$$W = \frac{1}{2} \int_{W_{\gamma_0}} \text{div } x \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial W_{\gamma_0}} x \cdot \mathbf{n} \, ds$$

となる。§2.2.C の定理の証明中にあるように, W_{γ_0} の境界 ∂W_{γ_0} 上 $x = \nabla \gamma(\mathbf{n})$ であるので, γ の正斉次 1 次性を用いると $\nabla \gamma(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \gamma_0(\mathbf{n})$ より

$$W = \frac{1}{2} \int_{\partial W_{\gamma_0}} r_0(\mathbf{n}) \, ds = \frac{1}{2} I_0$$

となる。こうして Γ_0 が ∂W_{γ_0} のとき $4WA_0 = I_0^2$ が示せた。

2.3 ガウス曲率流方程式

§2.1, §2.2 の方程式は, 座標を用いて記述すると準線形であった。ここで非線形性のさらに強い完全に非線形な曲率流方程式の代表例としてガウス曲率流方程式を挙げる。話を簡単にするためここでは $\Gamma(t)$ を閉曲面とし \mathbf{n} を $\Gamma(t)$ の内向き法ベクトル場とする。 K を \mathbf{n} 方向のガウス曲率つまり, 主曲率を $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ としたとき

$$K = \kappa_1 \cdots \kappa_{n-1}$$

とする。 $\Gamma(t)$ の方程式で

$$V = K \quad (26)$$

をガウス曲率流方程式と呼ぶ。この方程式は海岸で石が削られていく状況を記述するモデルとして考案された²²⁾。 $n = 2$ では (4) と同じなので $n \geq 3$ とする。

方程式 (26) を §2.1.B のように $\Gamma(t)$ が関数 u のグラフで与えられているとして u の方程式として書き下そう。向き \mathbf{n} が (11) で与えられるように u をとる。すると (26) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}^{2-n} \det \left(\left(I - \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \nabla \nabla u \right) \quad (27)$$

と表される。このことは主曲率が $(n-1) \times (n-1)$ 行列

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \left(I - \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \nabla \nabla u$$

の固有値であることと (12) より従う。ただし $\nabla \nabla u$ は u のヘッセ行列 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ ($1 \leq i, j \leq n-1$) を表し、 I は単位行列を表す。 \det は行列式を表す。

方程式 (27) より (26) が、準線形ではなくより非線形性が強いことがわかる。しかも (27) の右辺の作用素のマイナス 1 倍が楕円型であるかどうかは u の 2 階微分の符号によっている。簡単なために (27) の右辺の (-1) 倍が楕円型かどうか $\nabla u = 0$ を仮定して調べる。すなわち

$$F(\nabla \nabla u) = -\det \nabla \nabla u$$

の楕円型を調べよう。一般の次元では複雑なので $n = 3$ として §2.1.B の定義に従って P_0 を計算すると

$$P_0 = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

となり、行列

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}$$

に対応する 2 次形式の負定値性は、 $\nabla \nabla u$ に対応する 2 次形式の正定値性と同値である。つまり、 F は、 $\nabla \nabla u$ (に対応する 2 次形式) が正定値のとき、またそのときに限り楕円型になる。言い換えれば u のグラフが“狭義凸”の場合に楕円型になる。一般の次元の場合にもこのことが成立する。 $\nabla u \neq 0$ のところでも同様な楕円性の条件が得られるので、結局次の形にまとめられる。

定理 ガウス曲率流方程式は $\Gamma(t)$ の主曲率がすべて正ならば、2 階放物型である。 $\Gamma(t)$ を単に凸とすると (つまり主曲率がすべて非負ならば) 退化放物型である。

もし $\Gamma(t)$ が凹ならば (26) は熱方程式の時間の正負を入れ換えたタイプの方程式なので、一般に初期値問題の局所解を作ることさえ無理であることが想像できる。したがって、ガウス曲率流方程式の初期値問題を考える場合、曲面を少なくとも凸とする。ガウス曲率流方程式も変分構造をもつが、あまり有効に利用されていないようなので、ここでは述べない。

2.4 体積保存平均曲率流方程式

平均曲率流方程式は (10) で表されるように表面積を最も減らすように $\Gamma(t)$ を動かすことを要請している。ここでもし、 $\Gamma(t)$ の囲む図形の体積 (ルベグ測度) を保ちながらという束縛条件を課したら、どのような方程式が得られるであろうか。 Γ を閉超曲面とし D を Γ の囲む有界開集合とする。 D の体積を一定に保ちながらの変分 $\delta \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)/\delta \Gamma$ を計算する必要がある。§2.1.A の計算を思い出そう。 Γ が閉超曲面で 1 点 P の近傍で Ω で定義された関数 u のグラフで表されているとしよう。 \mathbf{n} が (11) で与えられているように u のグラフの上方に向いているとしよう。 Γ を Ω 内での u を変形することにより $\delta \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)/\delta \Gamma$ を計算する。 D の体積を保つためには、§2.1.A の $\Gamma_{\varepsilon \varphi}$ の φ について

$$\int_{\Omega} \varphi dx' = 0 \quad (28)$$

を課す必要がある。(7) は (28) を満たす φ についてのみ成立するので同じ記号でまぎらわしいが、体積保存条件のもとでは

$$\frac{\delta \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)}{\delta \Gamma} = -H + \text{定数}$$

となる。右辺を Γ 上で積分したときゼロにならないと変形が体積を保たないことになってしまうので、右辺の定数は H の Γ 上の平均値

$$\overline{\int_{\Gamma} H d\mathcal{H}^{n-1}} = \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)} \int_{\Gamma} H d\mathcal{H}^{n-1}$$

となる。よって

$$\frac{\delta \mathcal{H}^{n-1}}{\delta \Gamma}(\Gamma) = -H + \overline{\int_{\Gamma} H d\mathcal{H}^{n-1}}$$

対応する勾配方程式 $V = -\delta\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)/\delta\Gamma$ つまり

$$V = H - \int_{\Gamma} H d\mathcal{H}^{n-1} \quad (29)$$

は体積保存平均曲率流方程式と呼ばれている。実際 $\Gamma(t)$ の囲む図形 $D(t)$ の体積 $v(t)$ について

$$\frac{dv(t)}{dt} = \int_{\Gamma(t)} V d\mathcal{H}^{n-1}$$

なので (29) を $\Gamma(t)$ が満たせば $dv/dt \equiv 0$ が従い体積保存性がいえる。 dv/dt についての上の恒等式は (15) と本質的に同じである。

体積保存平均曲率方程式は、平均曲率流方程式とよく似ているようにみえるが、方程式の型は著しく異なる。方程式 (3) は (準線形 2 階放物型) 偏微分方程式であった。方程式 (29) は $\int H$ のような未知関数の積分を含むので $V(x, t)$ は $\Gamma(t)$ の x の近傍の形状を与えただけでは定まらないという意味で非局所的である。言い換えれば方程式 (29) は偏微分方程式ではない。そのような方程式について放物性の概念を定義すること²³⁾ は、ここでは行なわないが、積分すると微分の階数が落ちるという考えで (29) をながめれば、最高階の微分はやはり右辺第 1 項の H で、放物型方程式に近い性質が予想される。

2.5 表面拡散流方程式

物質の拡散方程式である熱方程式では物質の濃度勾配に比例した物質の流れによって物質の濃度変化が決定される。表面の分子流で界面が成長していくモデルを考えよう。今

$$V = \operatorname{div}_{\Gamma(t)} j \quad (\Gamma(t) \text{ 上})$$

とし、 j を分子流密度とする。

$$j = -\operatorname{grad}_{\Gamma(t)} H$$

で定まるとすると

$$V = -\Delta_{\Gamma(t)} H \quad (30)$$

なる表面拡散流方程式が得られる。ここで $\operatorname{div}_{\Gamma(t)}$, $\operatorname{grad}_{\Gamma(t)}$ はそれぞれ $\Gamma(t)$ 上の発散および勾配であり、 Δ_{Γ} は

$$\Delta_{\Gamma(t)} = \operatorname{div}_{\Gamma(t)} \operatorname{grad}_{\Gamma(t)}$$

で定義されるラプラス・ベルトラミ作用素である。この方程式は材料科学者のマリンス²⁴⁾ により 1950 年代に既に提唱されている。 $n=2$ すなわち $\Gamma(t)$ が曲線の場合は $\Delta_{\Gamma(t)}$ は弧長パラメータ s についての 2 階微分 ∂_s^2 であるので (30) は

$$V = -k_{ss} \quad (31)$$

なる形になる。

方程式 (30) は $\int_{\Gamma(t)} V d\mathcal{H}^{n-1} = 0$ なので $\Gamma(t)$ の囲む図形の体積が保存される (時間によらない) という点は、体積保存平均曲率流方程式 (29) に似ている。しかし (30) は微分方程式である。方程式の型を調べるために (31) で $\Gamma(t) = \{y = u(x, t)\}$ と関数 u のグラフで表されているとする。 \mathbf{n} を (11) のようにとると

$$\partial_s = \frac{1}{(1+u_x^2)^{1/2}} \partial_x$$

より

$$\begin{aligned} \frac{u_t}{(1+u_x^2)^{1/2}} &= -\frac{1}{(1+u_x^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(1+u_x^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} k \right) \\ k &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{u_x}{(1+u_x^2)^{1/2}} = \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (32)$$

と書ける。ただし $u_x = \partial u / \partial x$, $u_t = \partial u / \partial t$, $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$ なる記号を用いた。この方程式は 4 階で t 微分 x 微分の最高階のみ計算すると

$$u_t = -\frac{1}{(1+u_x^2)^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u + u \text{ の } x \text{ の 3 階微分までの項} \quad (33)$$

という形である。この形より方程式が準線形であり、かつ右辺の (-1) 倍がいつも楕円型であることがわかる。多変数の場合も、より複雑になるが、(30) が準線形 4 階放物型方程式となることがわかる。

さて方程式 (30) は平均曲率流方程式 (3) や (29) のように、変分構造をもつ。このことをみるために Γ を \mathbf{R}^n の閉超曲面とし、 \mathbf{n} 方向への変形を

$$\Gamma_t = \{x + t\rho(x)\mathbf{n}(x); x \in \Gamma\}$$

と表す。 ρ は Γ 上の滑らかな関数とする。パラメータ t を時間変数とみなすと時刻 $t=0$ での \mathbf{n} 方向の速度 $V(x, t) = \rho(x)$ となっている。恒等式 (16) と同様に

$$\frac{d\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma_t)}{dt} = - \int_{\Gamma_t} V H d\mathcal{H}^{n-1} \quad (34)$$

が得られるので

$$\frac{d\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma_t)}{dt}\Big|_{t=0} = - \int_{\Gamma} \rho H d\mathcal{H}^{n-1} \quad (35)$$

となる。このことは Γ 上の L^2 内積から定まるノルムを計量としたときの変分が

$$\frac{\delta\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma)}{\delta\Gamma} = -H$$

であることを示している。(9) と少し異なる変形についての変分であるが、変分は一致している。(このような曲面の変形をその垂直方向の成分で表す方法は、§2.4 の体積保存平均曲率流の変分構造をみる上でも有用である。) さて表面拡散流方程式においても超曲面の囲む図形の体積は保存されるので、上の変形でも Γ_t の囲む図形の体積は (少なくとも t がゼロに近いとき) t によらないとする。つまり

$$\int_{\Gamma} \rho d\mathcal{H}^{n-1} = 0 \quad (36)$$

とする。 Γ がコンパクトなので、この性質を満たす ρ については $u = (-\Delta_{\Gamma})^{-1}\rho$ を定義できる。つまり $-\Delta_{\Gamma}u = \rho$ なる方程式がただ一つの解をもつ。したがって

$$- \int_{\Gamma} \rho H d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Gamma} (-\Delta_{\Gamma})^{-1}\rho \Delta_{\Gamma}H d\mathcal{H}^{n-1} \quad (37)$$

を得る。(36) のように平均値がゼロの Γ 上の関数 φ_1, φ_2 に対して

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{-1} = \int_{\Gamma} ((-\Delta_{\Gamma})^{-1}\varphi_1)\varphi_2 d\mathcal{H}^{n-1}$$

と定めると、 $-\Delta_{\Gamma}$ の自己共役性および正値性より内積を定める。(この内積を H^{-1} 内積ということがある。) この表示を用いると (37) より

$$- \int_{\Gamma} \rho H d\mathcal{H}^{n-1} = \langle \rho, \Delta_{\Gamma}H \rangle_{-1}$$

と表せる。こうして内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$ から定まる計量で変分を考えると

$$\frac{\delta\mathcal{H}^{n-1}\Gamma}{\delta\Gamma} = \Delta_{\Gamma}H$$

が得られる。つまり計量を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$ から定まるものとして理解すれば (30) も (10) も同じ変分構造をもつのである。

この議論で用いた Δ_{Γ} の作用素論的性質についてまとめておこう。まず Γ を閉超曲面とする。(より一般にコンパクト・リーマン多様体としてよい。) $L^2(\Gamma)$ を Γ 上

の L^2 関数全体、つまり $\int_{\Gamma} |f|^2 d\mathcal{H}^{n-1} < \infty$ となる可測関数全体とする。 Δ_{Γ} を $L^2(\Gamma)$ の定義域

$$D(\Delta_{\Gamma}) = \{f \in L^2(\Gamma); \Delta_{\Gamma}f \in L^2(\Gamma)\}$$

とする作用素とする。ただし $\Delta_{\Gamma}f$ は超関数的に解釈する。

定理²⁵⁾ (i) Δ_{Γ} は $L^2(\Gamma)$ の自己共役作用素で非正値つまり $\int_{\Gamma} (\Delta_{\Gamma}f)f d\mathcal{H}^{n-1} \leq 0$ がすべての $f \in D(\Delta_{\Gamma})$ について成立する。

(ii) $-\Delta_{\Gamma}$ のスペクトルは、すべて固有値である。

(iii) $-\Delta_{\Gamma}$ の固有値はすべて非負実数でその集合は可算で、離散的である。

(iv) 0 は固有値でその固有関数は定数関数のみである。

最後の事実から (36) をみたま ρ に対して $(-\Delta_{\Gamma})^{-1}\rho$ が定義できるのである。

2.6 マリンズ・セカーカ (Sekerka) モデル²⁶⁾

結晶の凝固・融解のモデルとして導入されてきたが、最近では、金属の粒の粗視化を記述するカーン・ヒリヤード (Cahn-Hilliard) 方程式の特異極限²⁷⁾ として得られることがわかり、数学的研究が活発になっている。

まず Ω を \mathbf{R}^n の開集合とし、 $\Gamma(t)$ が Ω を二つの開集合 $\Omega_1(t)$ と $\Omega_2(t)$ に分けているとし、 $\Gamma(t)$ は Ω の境界とは交わらないとする。 \mathbf{n} は $\Omega_1(t)$ から $\Omega_2(t)$ を向いているとする。 H を \mathbf{n} 方向の平均曲率とし u_H^i を ($i=1,2$) を

$$\begin{cases} \Delta u_H^i = 0 & (\Omega_i(t) \text{ 上}) \\ u_H^i = H & (\Gamma(t) \text{ 上}) \end{cases} \quad (38)$$

の解とする。 Ω に境界があるときはそこで $\partial\Omega$ の法線微分 $\partial u / \partial \nu$ が恒等的にゼロであることを仮定する。 $(u_H^i$ が H を $\Gamma(t)$ を決めればただ一つ決まるようにするための条件とみなせる。 $\Omega = \mathbf{R}^n$ の場合も空間無限遠方での条件を課したり、 $\Gamma(t)$ が空間周期性を課したりして u_H^i がただ一つ定まるようにする)。 $\Gamma(t)$ の成長法則を (38) と合わせて

$$V = \frac{\partial u_H^1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u_H^2}{\partial \mathbf{n}} \quad (39)$$

で与える。ここで $\partial / \partial \mathbf{n}$ は \mathbf{n} 方向の微分を表す。

この問題は、 $\Gamma(t)$ の形状を決めれば V が決まるので、界面支配モデルであるが、 V は $\Gamma(t)$ の局所的形状からは決まらない。体積保存平均曲率流方程式と同様に、成

長法則 (38)-(39) は $\Gamma(t)$ の位置のみを用いた偏微分方程式では、表せない。さらに (38)-(39) の場合は、方程式の最高階に非局所的な効果があるので、方程式の階数を考えることも自明ではない。方程式の構造を論ずる前に、次の体積保存性を示そう。

定理 法則 (38)-(39) で動く $\Gamma(t)$ により囲まれた図形 $\Omega_i(t) (i=1, 2)$ の体積は時間によらず一定である。

実際、部分積分法と u_H^i の $\Omega_i(t)$ での調和性 (38) により体積 v の時間変化率 dv/dt は

$$\frac{dv}{dt} = \int_{\Gamma(t)} V d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\Omega_1(t)} \Delta u_H^1 dx + \int_{\Omega_2(t)} \Delta u_H^2 dx = 0$$

となり定理が示せる。

次に方程式の構造を調べるため H から $\frac{\partial u^i}{\partial n}$ を定める写像について述べる。

A. ディリクレ・ノイマン写像

領域 D で境界値を f とし内部で調和の関数 u を求める。つまりディリクレ (Dirichlet) 問題

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (D \text{ で}) \\ u = f & (D \text{ の境界上}) \end{cases} \quad (40)$$

を満たす u を求める。(この u を f の D への調和拡張という。) 例えば D が有界で、 D, f が十分滑らかなら、そのような u はただ一つ定まる²⁸⁾。この u に対して D の境界上で D の外向き法線微分 $\partial u / \partial \nu$ を考え、 f に $\partial u / \partial \nu$ を対応させる写像を **ディリクレ・ノイマン (Neumann) 写像** と呼び、 Λ_D で表す。方程式 (38)-(39) はディリクレ・ノイマン写像を用いると

$$V = \Lambda_1 H + \Lambda_2 H \quad (41)$$

と表される。ここで $\Lambda_i = \Lambda_{\Omega_i}$ と記した。第2項の符号が正になるのは、 \mathbf{n} が Ω_2 からみると内向きになっていることによる。

方程式 (41) は微分方程式ではないが、階数や放物性は定義できないのであろうか。これは擬微分作用素の枠組²³⁾ で可能である。ここでは D が上半空間 $\mathbf{R}_+^n = \{(x', x_n); x_n > 0, x' \in \mathbf{R}^{n-1}\}$ の場合のディリクレ・ノイマン写像 Λ_D をフーリエ (Fourier) 変換を用いて表し、階数や楕円性の意味を説明するのにとどめる。まず D

を \mathbf{R}_+^n とし、(40) を考え、 x' 変数の関数についてのフーリエ変換を

$$\hat{f}(\xi') = (\mathcal{F} f)(\xi') = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{-\sqrt{-1}x' \cdot \xi'} f(x') dx'$$

と書く。 x_n をパラメータと思い $\hat{u}(\xi', x_n) = (\mathcal{F} u)(\xi', x_n)$ と書き、(40) をフーリエ変換すると

$$\begin{cases} \frac{d^2 \hat{u}}{dx_n^2} - |\xi'|^2 \hat{u} = 0, & x_n > 0 \\ \hat{u}(\xi', 0) = \hat{f}(\xi') \end{cases} \quad (42)$$

となる。ここで

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f) = - \int_{\mathbf{R}^{n-1}} (\partial_{x_j} e^{-\sqrt{-1}x' \cdot \xi'} f(x')) dx' = -\sqrt{-1} \xi_j \mathcal{F} f \quad (1 \leq j \leq n-1)$$

を用いた。ここでは積分の意味など厳密に考えず形式的な計算のみ行っている²⁹⁾。さて (41) の2階常微分方程式の初期値問題を

$$\hat{u}(\xi', x_n) = \hat{f}(\xi') e^{-|\xi'| x_n} \quad (43)$$

が満たすことは自明であるが、常微分方程式の初期値問題としては一見条件が一つ足りず、例えば $e^{|\xi'| x_n} \hat{f}(\xi')$ も解になる。しかし、この関数は ξ' についての無限遠での増大が大きすぎて関数のフーリエ変換とみなせないので考えない。こうして、(43) で与えられる \hat{u} のみが意味のある解になる。(40) の解は逆フーリエ変換を用いて

$$u(x', x_n) = \mathcal{F}^{-1} e^{-|\xi'| x_n} \mathcal{F} f$$

と表される。 x_n について微分することにより

$$\Lambda_{\mathbf{R}_+^n} f = \left(-\frac{\partial}{\partial x_n} \right) u|_{x_n=0} = \mathcal{F}^{-1} |\xi'| e^{-|\xi'| 0} \mathcal{F} f = \mathcal{F}^{-1} |\xi'| \mathcal{F} f$$

を得る。式 (42) を得るのに用いた、フーリエ変換の性質

$$\partial_{x_j} f = \mathcal{F}^{-1} (\sqrt{-1} \xi_j) \mathcal{F} f \quad (1 \leq j \leq n-1)$$

により微分作用素はフーリエ変換された世界ではその特性多項式をかける操作になることがわかる。 $\Lambda_{\mathbf{R}_+^n}$ はフーリエ変換された世界では $|\xi'|$ をかける操作にほかならない。特性多項式の次数が微分作用素の階数であることより $\Lambda_{\mathbf{R}_+^n}$ は微分作用素ではないが、1階と考えるのが自然である。また $\xi' \neq 0$ なら $|\xi'| > 0$ なので楕円型と考

えるのが自然であろう。 D の境界が曲っているときは、このようにきれいにはいかないが、擬微分作用素論²³⁾によると Λ_D は1階楕円型作用素になる。平均曲率 $-H$ は2階楕円型であったので $-(\Lambda_1 H + \Lambda_2 H)$ は3階非線形楕円型作用素と考えられ (41) は3階の放物型方程式とみなせる。

B. 変分構造

方程式 (38)-(39) (又は同値な表現である (41)) の計量をうまくとると (10) 式のような変分構造をもつ。それは Λ_D が $L^2(\partial D)$ での自己共役作用素でかつ非負値であり $-\Delta_\Gamma$ と同様な性質をもっていることに基づく。(§2.5 の定理を参照) 例えば非負性は部分積分法により

$$\int_{\partial D} (\Lambda_D f) f d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\mathcal{H}^{n-1} = \int_D (\Delta u) u dx + \int_D |\nabla u|^2 dx = \int_D |\nabla u|^2 dx \geq 0$$

となるので明らかである。よって (36) を満たす ∂D 上の関数 φ_1, φ_2 に対して

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{-1/2} = \int_{\partial D} (\Lambda_D^{-1} \varphi_1) \varphi_2 d\mathcal{H}^{n-1}$$

で内積を定められる。 (Λ_D^{-1}) は Λ_D の逆作用素である)。方程式 (41) に用いるためには Λ_D の代わりに $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$ として内積を定義する。すると (37) と同様に

$$\begin{aligned} - \int_\Gamma \rho H d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_\Gamma \Lambda^{-1} \rho (-\Lambda H) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \langle \rho, -\Lambda H \rangle_{-1/2} \end{aligned}$$

を得るので、上の内積から定まる計量によって変分を解釈すれば (41) も (10) 式の型でかける。

2.7 異方性に対する注意

§2.4 以下の3つの例で H を重みつき平均曲率 H_{γ_0} として置き換えたものも、実際上有用である。 γ_0 のフランク図形の境界の内向き主曲率がいたるところ正で滑らかな場合は、放物性、階数のような方程式の構造は、 H の場合と同じである。変分構造については γ_0 について何も仮定しなくても、§2.4-2.6 と同様である。 γ_0 のフランク図形の主曲率がゼロになる場合は放物性は退化する。またフランク図形にカドがある場合、方程式が非局所的になるが、§2.4-2.6 についてはまだあまり解析されていない。

3 自己交叉の発生、凸性の消失、順序非保存

いよいよ2節で紹介した方程式の数学解析の結果を述べよう。1節で呈示した基本的問題の (i), (ii), (iii) を考えてみよう。このうち滑らかな初期閉曲面 (曲線) Γ_0 に対して、平均曲率流方程式¹⁷⁾、体積保存平均曲率流方程式³⁰⁾、表面拡散流方程式³¹⁾、マリンズ・セカーカモデル³²⁾ については、時間局所解の一意存在が知られている。詳しくは述べないが、方程式が非線形であっても放物型であれば、時間局所的な解は、方程式の詳しい構造によらずに構成できるという感覚をもっていれば予想できることである。もちろん実際に示すには、問題に応じた多大の努力が必要である。ガウス曲率流についても Γ_0 の内向き主曲率がすべて正ならば、方程式は放物型なので、局所解の一意存在が示せる³³⁾。(この場合、狭義凸性は時間発展とともに保たれ、有限時間で1点に縮むこともわかっている。) しかし Γ_0 を単に凸とすると放物性が退化しているので、局所的に解くことにも注意がいる。非等方的平均曲率流についても Frank γ_0 が‘狭義凸 (仮定 (22))’でかつ滑らかならば、放物型方程式の理論で局所解の一意存在³⁴⁾ はいえるが、放物性が退化したり、あるいは Frank γ_0 にカドが出たりして Γ_0 が滑らかさを失うと、局所解の存在といっても解の概念をはっきりしないと、示せない。というのは、 Γ_0 が滑らかであっても解の候補は瞬間的に滑らかさを失いうるからである。ここでは局所解の問題についてこれ以上深入りしない。その代わり (iii) にあたる問題として凸性が保存されるかどうか、考えてみよう。

3.1 凸性の保存

次のことを問題にする。

「初期曲面 Γ_0 を凸 (又はより強く狭義凸) とする。このとき方程式 (1) の解 $\Gamma(t)$ は、存在している限り凸であるか」

平均曲率流方程式¹⁷⁾、ガウス曲率流方程式^{33), 35)} のような2階のモデルでは、上の凸性保存が成立する。また、非等方的平均曲率流方程式に対しても少なくとも Frank γ_0 が滑らかなら成立する。非局所項のある体積保存平均曲率流³⁰⁾ でも凸性が保存される。しかし、マリンズ・セカーカモデルでは、 Γ_0 が凸であっても、 $\Gamma(t)$ が凸となり得ないことが最近証明された³⁶⁾。表面拡散流方程式についても、凸性は保たれない³⁷⁾。このような違いは何によるのであろうか。一言でいえば、方程式が2階であ

るかそうでないかによる。次の線形方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} u_t = -u_{xxxx}, & t > 0, & x \in (-1, 1) \\ u(t, \pm 1) = 0, & u_{xx}(t, \pm 1) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & & x \in (-1, 1) \end{cases} \quad (44)$$

を考えよう。ここで $u_t = \partial u / \partial t$, $u_x = \partial u / \partial x$, $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$, \dots と記した。また f は与えられた関数で凹とし簡単のために偶関数とする。このとき解 $u(t, x)$ は $t > 0$ では x の関数として凹であるか？言い換えれば $u_{xx}(t, x) \leq 0$ はいつも成立するのであろうか？このために $v = u_{xx}$ とおき v の方程式をつくる。ここで

$$v_{xx}(t, \pm 1) = u_{xxxx}(t, \pm 1) = -u_t(t, \pm 1) = 0$$

なので v は (44) を初期値 f_{xx} として満たすことがわかる。小さい $\varepsilon > 0$ に対して、 f を $x = 0$ で変形し $\partial_x^{(6)} f^\varepsilon(0) = -1$, $\partial_x^{(2)} f^\varepsilon(0) \geq -\varepsilon$ となる凹偶関数 f^ε を作る。 f^ε の凸性は $x = 0$ では $-\varepsilon$ で弱い。 u^ε を初期値 f^ε とした (44) の解とする。このとき $v^\varepsilon = u_{xx}^\varepsilon$ とすると平均値の定理より

$$v^\varepsilon(t, 0) = v^\varepsilon(0, 0) + v_t^\varepsilon(0, 0)t + v_{tt}^\varepsilon(\zeta, 0)t^2/2$$

がある t による $\zeta(0 < \zeta < t)$ に対して成立する。もちろん $v_t^\varepsilon = -\partial_x^{(6)} u$ なので

$$v^\varepsilon(t, 0) \geq -\varepsilon + t - \sup_{0 \leq \tau < t} v_{tt}^\varepsilon(\tau, 0)t^2/2 \quad (45)$$

と評価できる。ここで t^2 の係数の絶対値が ε によらず、また $t < 1$ によらず有界なら、 ε を小さくすると $v^\varepsilon(t, 0)$ はある時間区内 (t_0, t_1) で正となり t_0 は $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると 0 に近づく。このことは t についての 2 次不等式の性質による。したがって凹性は保たれない。ただし、ここで t^2 の係数について仮定を置いた。これには、 f から f^ε を作る変形の仕方をうまく定める必要がある。表面拡散流方程式の凸性の消失をいうのに便利な変形法を紹介しよう。

f を区間 $I = (-1, 1)$ 上で定義された実数値凹関数で偶関数とする。 $\varepsilon, \delta > 0$ に対して

$$\begin{aligned} (M_{\varepsilon, \delta} f)(x) &= f\left(-\frac{1}{2}\right) + \int_{-1/2}^x v_{\varepsilon, \delta}(\xi) d\xi, \quad x \in I \\ v_{\varepsilon, \delta}(x) &= \int_0^x w_{\varepsilon, \delta}(\xi) d\xi \varphi_{1/4}(x) + f_x(x)(1 - \varphi_{1/4}(x)) \\ w_{\varepsilon, \delta}(x) &= \left(-\varepsilon - \frac{x^4}{4!}\right) \varphi_\delta(x) + f_{xx}(x)(1 - \varphi_\delta(x)) \end{aligned}$$

と定義する。ここで φ_δ は切りおとし関数で

$$\begin{aligned} \varphi_\delta(x) &= \varphi(|x|/\delta) \\ \varphi(x) &= q(2x), \quad q(x) = \frac{p(x)}{p(x) + p(1-x)}, \quad x \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

により定義する。但し $p(x) = e^{-1/x}(x > 0)$, $p(x) = 0, (x \leq 0)$ とする。 φ の定義より $0 \leq \varphi \leq 1$ かつ $\varphi(x) = 1(0 \leq x \leq 1)$, $\varphi(x) = 0(x \geq 2)$. この変形は f の 2 階微分を $x = 0$ 付近で $-\varepsilon - \frac{x^4}{4!}$ で置き換えて、 f' の影響する部分を狭くした変形である。明らかに $|x| \geq 1/2$ では $M_{\varepsilon, \delta} f(x) = f(x)$ である。 $M_{\varepsilon, \delta} f$ の微分の大きさは δ にはよるが ε によらない定数でおさえられるので、この場合は、(44) の $f = M_{\varepsilon, \delta} f$ とした解についても v_{tt}^ε は (少なくとも $t < 1$) では ε によらず有界になる。 $(M_{\varepsilon, \delta} f)_{xx}(0) = -\varepsilon$, $(M_{\varepsilon, \delta} f)_{xxxx}(0) = -1$ なり、これで、凹性の非保存が証明できたようにみえるが、 $M_{\varepsilon, \delta} f$ 自身が凹でなくなる恐れがあるので注意がいる。しかし幸いなことに次が成立する。

補題 小さい数 $\delta_0 < 1/8$ が存在して、 $M_{\varepsilon, \delta} f$ は $0 < \delta < \delta_0, \varepsilon \in (0, 1)$ なら、凹 (狭義) である。

問題 (44) の f を $f^\varepsilon = M_{\varepsilon, \delta} f$ とし、 δ を f^ε が凹になるように小さく選べば、(44) の解 u が有限時間で凹性を失うことがわかる。しかも ε を 0 に近づけようとするとその失う時間は 0 に近づく。なお、補題の証明は、初等的なので、読者の演習問題とするが、 $M_{\varepsilon, \delta} f$ の作り方のよさが反映されていることを味わってほしい。

曲線に対する表面拡散方程式 (31) に対して凸性非保存の Γ_0 を作るのには、この変形を用いればよいが、非線形性のため、凸性を失う前に解 $\Gamma(t)$ に特異点を生じる恐れがないとはいえない。そこで、局所存在定理が必要で、さらに曲率にあたる量を (45) のように評価するときの t^2 の係数の評価のためにも用いる。こうして、次の結果が得られる。一般次元の場合の (30) についても凸性非保存であるが、ここでは述べない。

定理 C を xy 平面内の y 軸に対称な狭義凸な滑らかな曲線とする。 C と y 軸の交点の一つを P とする。 P の近傍で C をうまく変形して得られる狭義凸な曲線 Γ_0 を初期値とする (31) の解 $\Gamma(t)$ は、ある時刻 (t_0, t_1) で滑らかで自己交叉しないが凸性を失う。

さて方程式が2階のとき凸性が保存されやすいことを(44)に似た例題で調べてみよう。次の熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, & x \in (-1, 1) \\ u(t, \pm 1) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in (-1, 1) \end{cases} \quad (46)$$

$v = u_{xx}$ も同じ問題の f を f_{xx} とした時の解になっている。したがって凸性保存性の問題は(46)の解の非負性(非正性)の保存の問題になる。しかし、これは最大値原理から明らかで、 $f \leq 0$ なら(46)の解 u は $u \leq 0$ である。(強最大値原理で実は $u(t, x) < 0, x \in (-1, 1), t > 0$ もいえる。) こうして f が凹なら $u(t, x)$ が x の関数として凹であることがいえる。

3.2 自己交叉の発生

次に Γ_0 を平面内の自分自身と交わらない閉曲線とする。このとき、次の点を問題にしよう。

問題 Γ_0 を初期値とする(1)の解 $\Gamma(t)$ は存在する限り自分自身と交わらないか。

もちろん Γ_0 が曲面の場合でも、埋めこみかはいれこみかで、交わる場合を許さないか、許すか区別できるので、同じ問題を呈示できるが、ここでは特に曲線の場合に述べる。

曲線短縮方程式(4)では $\Gamma(t)$ は、存在する限り自分自身と交わらずやがて凸になることが知られている³⁸⁾。非等方的な問題では、フランク図形の凸性の仮定(22)があれば同様なことがいえると思われるが、そのような結果が出版されていないようである。§2.4の囲む面積を一定とした曲率流方程式は $-\int k = 2\pi/L$ (L は $\Gamma(t)$ の長さ)なので

$$V = k + \frac{2\pi}{L}$$

となる。(V を外向き法速度とし、 k を外向き曲率とした。) 図2のような初期値を考えれば、直線部分では外向きにほぼ $2\pi/L$ で進むので有限時間で自分自身と交叉してしまう^{39a)}。表面拡散流方程式についても有限時間で自己交叉が起こりうる³⁹⁾ことが示された。しかし、マリンズ・セカーカモデルでは、自己交叉が起こりうるかどうか不明である。

方程式(31)を直接 $y = 0$ のまわりで線形化すると

$$u_t = -u_{xxxx}$$

を得るが、 $u^+(t, x) = -t + \frac{x^4}{4!} + \delta$ ($\delta > 0$) はこの方程式の解である。一方 $u^-(t, x) = -u^+(t, x)$ も解であるので、この二つの解のグラフを同時に xy 平面に書くと、有限時間で交わることがわかる。したがって(31)に対しても図3のような鉄アレイ型の初期曲線 Γ_0 を考え、くびれ付近で $u^+(0, x)$ と $u^-(0, x)$ のグラフのような形になっているとすると、 δ を小にとれば解 $\Gamma(t)$ は自己交叉を起こしそうである。しかし、非線形なので、自己交叉を起こす前に解に特異点を生じて解としての意味を失うこともありうる。そこで、自己交叉も許す形の局所解の存在定理を用意して、自己交叉を起こしてもしばらく滑らかな解として意味があることを示し、実際自己交叉を起こす、自己交叉しない Γ_0 を構成するのである。

$\Gamma(t)$ が自己交叉をしてもそれが滑らかならば(31)は意味を持っている。しかし、マリンズ・セカーカモデルでは、 $\Gamma(t)$ が自己交叉したとき、その意味づけをすることは難しい。それが解析を困難にしているのである。

空間次元 n が3以上の平均曲率流方程式の解の中には、ハンドルの細いダンベル(図4)のように有限時間で、くびれがちぎれ特異点が生じる⁴⁰⁾ことがあるが、ちぎれた時点で、曲面の平均曲率の最大絶対値が無限大になるので、これはいわゆる自己交叉ではない。

3.3 順序保存性

2階と高階の放物型方程式の違いをよく表している性質に以下の順序保存性がある。

順序保存性 $\Gamma'(t)$ と $\Gamma(t)$ をそれぞれ初期値 Γ'_0, Γ_0 とする(1)の解とする。 Γ'_0 が Γ_0 を包みこむ(図5)とき、 $\Gamma'(t)$ は $\Gamma(t)$ を常に包みこむ。

平均曲率流方程式、ガウス曲率流方程式、非等方平均曲率流方程式のいずれも、最大値原理より順序保存性が従う。もちろんガウス曲率流方程式に対しては少なくとも退化放物型にするために凸な曲面に限定する。また非等方平均曲率流方程式についても Frank γ_0 の凸性と滑らかさを仮定する。

それに対して、体積保存平均曲率流方程式、表面拡散流方程式は順序保存性はない。例えば (31) については、鉄アレイ型のくびれの部分に円を置くと、円は (31) の定常解で動かないので、必ず鉄アレイ型を初期値とした解と交わってしまう (図 6)。マリンズ・セカーカモデルについても、順序非保存のはずであるが文献にきちんと書かれているかどうかは不明である。

順序保存性は、とても強力な性質である。実際、解が何らかの特異点を生じてから後に解の概念を拡張して解を構成していく等高面の方法⁹⁾は、この順序保存性をその理論の基礎としている。したがって表面拡散方程式の解が自身とぶつかってから、解のわかる相をどのように解釈していったらよいといった問題には、現在までの等高面法は答えられない。

3.4 解の挙動に対する種々の結果

解 $\Gamma(t)$ の挙動が比較的良好にわかっているのは、やはり平均曲率流方程式である。既に §2.2.D の末尾に述べたように凸曲面の縮み方の漸近形は知られている。その他軸対称曲面がどのような特異点をもつかも、ある程度わかるが、一般の特異点の分類は、難しい⁹⁾。

ガウス曲率流方程式については次節で述べることにして、体積保存平均曲率流方程式を考えよう。定常解 (時間によらない解) として球面があるが球面に近い初期値 Γ_0 から出発すると解 $\Gamma(t)$ は $t > 0$ で存在し Γ_0 の囲む体積と同じ大きさの球体を囲む球面に $t \rightarrow \infty$ で収束することが知られている⁴¹⁾。表面拡散流方程式³¹⁾、マリンズ・セカーカモデル⁴²⁾ についても同様な結果がある。

なお、ガウス曲率流方程式を除いてある種の反応拡散方程式の特異極限として方程式が導出されるので²⁷⁾、反応拡散方程式の解の特定の等高面で $\Gamma(t)$ を近似することもできる。特異極限の問題はここでは触れない。

4 退化放物性・強い放物性

非等方的平均曲率流方程式 (21) を $n = 2$ とし、 $\Gamma(t)$ が関数 $u(x, t)$ ($x \in \mathbf{R}$) のグラフ $y = u(x, t)$ で与えられているとして、 u の方程式として表現しよう。まず考えを決めるため $\Gamma(t)$ の単位法ベクトルを (11) のようにとる。関数 γ は正斉次 1 次性

より

$$\operatorname{div} \xi(\mathbf{n}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial q_1}(-u_x, 1) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial q_2}(-u_x, 1) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial q_1}(-u_x, 1) \right)$$

となる。こうして (21) は

$$\frac{u_t}{\sqrt{1+u_x^2}} = -M \left(\frac{-u_t}{\sqrt{1+u_x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial p_1}(-u_x, 1) \right)$$

と表せるが、

$$a(p) = M \left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right) \sqrt{1+p^2} \quad (47)$$

$$W_0(p) = \gamma(-p, 1)$$

とすると

$$u_t = a(u_x) \frac{\partial}{\partial x} (W'_0(u_x)) \quad (48)$$

と簡潔に表せる。変数が一変数であるので

$$W(p) = \int_0^p \left(\int_0^r a(s) W''_0(s) ds \right) dr \quad (49)$$

と置くことにより、さらに (48) は

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} (W'(u_x)) \quad (50)$$

と表せる。関数 γ の性質は W_0 そして W によく反映されている。 M が正 (つまり a が正) とし滑らかとする。このとき γ が凸ならば W は凸、 γ が滑らかで狭義凸 (22) ならば、 W_0 は狭義凸で $W''_0(p) \geq \lambda > 0$ である。より局所化して述べることもできる。Frank γ_0 (境界の内向き) 曲率が $(-p/\sqrt{1+p^2}, 1/\sqrt{1+p^2})$ を方向ベクトルとする半直線との交点 P でゼロなら $W''_0(p) = 0$ 、正なら $W''_0(p) > 0$ となっている。また P で Frank γ_0 がカドをもつと W'_0 は p で不連続で、Frank γ_0 (の境界) が P で C^m 級なる W'_0 は p で C^{m-1} 級といった具合である。 W_0 と W を結びつける公式 (49) により、以上の記述は W_0 を W' に置き換えても成立する。ただし W'_0 が C^1 級でないときは、 W''_0 は非負測度として解釈して (49) を理解する。

4.1 退化性

方程式 (50) で W'' が $|p| < 1$ のところでゼロ, $|p| > 1$ で正とする。簡単のため $p = \pm 1$ の付近で W'' は有界とし, W'' の $+1$ での右極限 $W''(1+0)$, -1 での左極限 $W''(-1-0)$ は存在するとする。 $p = \pm 1$ で不連続になるか連続になるかで状況が異なるが, いずれも方程式 (50) は $|u_x| < 1$ でその放物性が退化している。まず問題の型を調べる。

(i) W'' が $p = \pm 1$ で不連続の場合 (図 7 a)

定性的性質からみるため $|p| > 1$ で $W''(p) \equiv 1$ の場合を考えよう。すると W' が定数差を除いて

$$W'(p) = \begin{cases} p-1 & p > 1 \\ 0 & |p| \leq 1 \\ p+1 & p < -1 \end{cases}$$

となる。したがって $|u_x| > 1$ では (50) は

$$u_t = u_{xx} \quad (51)$$

$|u_x| < 1$ では

$$u_t = 0$$

であることを要請している。この二つの状態の境目では何が要請されているのであろうか。それを予想するため $u(x, t)$ を x について凸とし, $u_x(\zeta(t), t) = 1, u_x(\eta(t), t) = -1$ となる $x = \zeta(t), x = \eta(t)$ がただ一つ決まり, また t について滑らかという状況を考えよう (図 8)。さらに $\eta(t) < \zeta(t)$ とする。 $x > \zeta(t)$ では, 上向き単位法ベクトル

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{u_x}{(1+u_x^2)^{1/2}}, \frac{1}{(1+u_x^2)^{1/2}} \right) = (n_1, n_2)$$

方向の法速度 V は $u_t = u_{xx}$ より

$$V = \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{1/2}}$$

で与えられる。 $\eta(t) < x < \zeta(t)$ では $u_t = 0$ であるからこの曲線がちぎれないで動くためには, ζ の速度が V の $\zeta(t)$ での x 成分でなければならない。つまり,

$$\frac{d\zeta}{dt}(t) = V(\zeta(t) + 0, t) \frac{1}{n_1(\zeta(t) + 0, t)}$$

でなければならない。ここで $+0$ は右極限を表す。こうして

$$\frac{d\zeta}{dt}(t) = \frac{u_{xx}(\zeta(t) + 0, t)}{-u_x(\zeta(t) + 0, t)} = -u_{xx}(\zeta(t) + 0, t) \quad (52)$$

を得る。 η についても同様に

$$\frac{d\eta}{dt}(t) = u_{xx}(\eta(t) - 0, t)$$

を得る。 u の微分 u_x を v で表すと (51)-(52) より

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} \quad x > \zeta(t) \\ v(\zeta(t), t) &= 1, \quad \frac{d\zeta}{dt} = v_x(\zeta(t), t) \end{aligned} \quad (53)$$

が得られる。この方程式系では $\zeta(t)$ を既知とすると条件が過剰で $\zeta(t)$ をも未知として解がなければならないので, $x = \zeta(t)$ を自由境界と呼ばれている。(53) に v, ζ の初期値を与えた問題は, 古典的意味でのステファン問題であり, 自由境界問題の代表例としてよく研究されている。 ζ の速度を決定する条件をステファン条件という。もちろん $x = \eta(t)$ に対してもステファン問題²⁾⁻⁴⁾ になっている。なお $\eta(t) = \zeta(t)$ ということもありうる。その場合ステファン条件は

$$\frac{d\zeta}{dt} = -v_x(\zeta(t) + 0, t) + v_x(\zeta(t) - 0, t)$$

となる。この場合は $x < \zeta(t), x > \zeta(t)$ の両方で熱方程式が仮定されているので 2 相問題, これに対し (53) を 1 相問題という。このような背景があるので (i) の場合をステファン型ということにする。方程式 (50) を自由境界問題に帰着せず直接解の存在一意性を調べ, その挙動を調べることも粘性解理論を拡張すると可能である⁵⁰⁾。

(ii) W'' が $p = \pm 1$ で連続の場合 (図 7 b)

この場合 W' は C^1 級関数で $v = u_x$ と置くと

$$v_t = (W'(v))_{xx} \quad (54)$$

となる。定数を調整することにより $W'(v)$ は $|v| \leq 1$ でゼロとしても一般性を失わない。典型的な状況を考えるために $W'(v)$ が $v = 1$ の付近で $(v-1)_+^m (m > 1)$ となっている状況を考える。(下付きのプラスは非負値部分を表す。つまり $a_+ = \max(a, 0)$ を表す。) ここで $v-1$ を z と置くと (54) は

$$z_t = (z_+^m)_{xx}$$

となりいわゆる多孔質媒質の方程式となる。 $z > 0$ となる領域の境界 $x = \zeta(t)$ が自由境界になる。この自由境界の挙動もよく研究されている⁴³⁾。ステファン問題との違いは、初期値によっては、ある時間自由境界が、止まって動かないことがあるところである。

このような背景で (ii) を多孔質型ということにする。もちろん $p = +1$ でステファン型 (W'' がジャンプする) $p = -1$ で多孔質型 (W'' が連続) ということもある。自由境界 $x = \zeta(t), x = \eta(t)$ がぶつからない限り、別々に議論して構わない。ぶつかった場合はこれまで扱われていない未知の世界である。

ガウス曲率流方程式を狭義凸でない凸の曲面を初期値と考えると、方程式が退化するが、多孔質型のように、自由境界が最初の一定時間とまってしまうところが、面白い³⁵⁾。

4.2 強い放物性

さて、表面エネルギー密度 γ_0 のフランク図形に §2.2. B の例のようにカドがある場合は (47) の W_0 は C^1 級でなくなりうる。典型的な状態を考えるために (50) で $W(p) = |p|/2$ として考えてみよう。すると W の 2 階微分 W'' はディラックのデルタ関数 δ なので、(50) は形式的には

$$u_t - \delta(u_x)u_{xx} = 0 \quad (55)$$

と書ける。傾き u_x が 0 以外では拡散はなく退化しているが傾き $u_x = 0$ では強い拡散をもっている。 $\delta(u_x)$ は u_x が滑らかとしても (超) 関数としても意味づけることはできない。したがってこの方程式の解をどのように定義したらよいかが、まず問題になる。方程式 (55) については (i) 非線形半群論⁴⁴⁾ (ii) 粘性解⁴⁵⁾ を用いる方法で (55) の初期値問題の解が δ を滑らかな正関数で近似した問題の解の極限として得られる解は、関数の形状が特殊の場合は、次のような直観的考察⁴⁶⁾ によって作られる‘解’と一致している。

連続関数 $u = u(x, t)$, $t \geq 0$ が区間 $(a(t), b(t))$ で x について定数で

$$u_x(a(t) - \eta, t) > 0, \quad u_x(b(t) + \eta, t) < 0 \quad (56)$$

が十分小さな η についていえているとしよう。また $a = a(t), b = b(t)$ は t について滑らかに動くとする。 $u_x = 0$ 方向に拡散が強いから、ちょうどフランク図形のカ

ドに対応してウルフ図形のファセットが出現したことを思い出し、 $u_x = 0$ なる‘ファセット’を考えたのである。 u が方程式 (55) を満たしたとしたら、区間 (a, b) 上で u_t はどのような値になるのであろうか。ここで u の形を制限することにより u_t が区間 (a, b) の上で x によらないことを暗に仮定していることに注意する。(55) の両辺を積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{a-\eta}^{b+\eta} u_t(x, t) dx &= \int_{a-\eta}^{b+\eta} \delta(u_x) u_{xx} dx = \int_{a-\eta}^{b+\eta} (W'(u_x))_x dx \\ &= W'(u_x(b+\eta, t)) - W'(u_x(a-\eta, t)), \quad W(p) = |p|/2 \end{aligned}$$

を得る。ここで η を 0 に収束させ (56) を用いると

$$\int_a^b u_t(x, t) dx = W'(-0) - W'(0) = -1$$

さらに u_t が (a, b) で定数であることにより

$$u_t = -\frac{1}{b-a} \quad (57)$$

となる。もし (56) の不等号を二つとも逆にすると (57) の右辺は $(b-a)^{-1}$ となり片方だけ逆にすると (57) は $u_t = 0$ となる。区間 (a, b) の外で $u_x(x, t) \neq 0$ なら、(55) より

$$u_t(x, t) = 0 \quad (58)$$

となる。初期値 $u(x, 0) = u_0(x)$ が与えられ a, b の初期値を与えられているとすると $(a(t), b(t))$ の外で

$$u(x, t) = u_0(x)$$

が (58) より得られる。また u の連続性より

$$u(x, t) = u_0(a(t)) = u_0(b(t))$$

この等式を t で微分し (57) と連立すると a, b の満たす微分方程式が得られ、(57), (58) を満たす解が作れる。これを (55) の解と考えてよいのであろうか。その一つの根拠は、このような関数が近似問題の解の極限として得られていることにある。

さて (57) によると $\delta(u_x)u_{xx}$ に対応する量は u の平らな部分 (ファセット) の長さ $b-a$ によっている。したがって非局所的な量である。一般に、表面エネルギーのフランク図形にカドがあるとき、その方向に対応する曲率は、非局所的な量として

認識する必要がある。そうしないとウルフ図形の曲率 H_{γ_0} が $-(n-1)$ とはならない。 $n=2$ の場合、ファセットの長さ分の定数と考えるとつじつまがあう。

W が区分的に1次の場合、関数の形状を制限することによって、((55)の解の直観的に得る方法の拡張として)連立常微分方程式に帰着する方法はクリスタライン・アルゴリズム⁴⁷⁾と呼ばれる。一般の W と初期値を区分的な1次の関数で近似し、近似解を作るという数値解析としても有力である。このスキームの収束性についての研究も進んでいる。ここで注意したいのは、クリスタライン・アルゴリズム自身も、滑らかな問題の極限として得られるところである。離散問題(数値スキーム)が連続問題(微分方程式)を近似することは多いが、逆がいえことは、少い。

空間次元1次元の場合は、研究が進んでいるが、高次元の場合は、§2.2に対応するクリスタライン・アルゴリズムの順序保存性は特殊な場合にしか成り立たないので、近似性も未解決である。

高階の方程式に対しては、数値計算はあるが、その解析は、まだ何もない。

5 おしまいに

種々の界面支配モデルに対しての、その方程式の特徴と、これまでの研究について概観した。詳しい解析法については、ほとんど述べなかった。というのは、ちょっとした局所解の存在定理でも、それをきちんと書くとなると相当な準備がいるからである。その代わり、ここでは参考論文を挙げて読者の便をはかった。

界面支配モデルを記述する微分方程式の数学の歴史は短く、せいぜい20年程度である。本稿を読んでいただいてわかるように、予備知識がたくさんないと問題そのものの意味が理解できないという分野ではない。その意味で、若い人にも参加しやすい分野であろう。本稿では、随所に未解決問題を述べた。本稿によって数学解析に興味をもつ読者が増えることを期待する。

なお、本稿は、1998年3月28日に名城大で著者が行なった日本数学会企画講演をもとに作成したものである。本稿について貴重なご意見をいただいた宮崎大学の辻川亨教授、北海道大学の神保秀一助教授、伊藤一男助手および一橋大学の石村直之助教授に感謝いたします。また原稿を精力的に入力していただいた花絹(株)の岩井久子氏に感謝いたします。本稿の執筆中に、日産科学財団より研究助成金を、また文部省より科学研究費補助金をいただきました。あわせてここに感謝申し上げます。

る次第です。

文献

- 1) 例えば、太田隆夫、界面ダイナミクスの数理、日本評論社 1997 を参照のこと。
- 2) 山口昌哉・野木達夫、ステファン問題、産業図書、1977
- 3) L. I. Rubinstein, The Stefan problem, American Math. Society, 1971
- 4) A. M. Meirmanov, The Stefan problem, Walter de Gruyter, 1992
- 5) M. E. Gurtin, Thermomechanics of evolving phase boundaries in the plane, Clarendon Press, Oxford 1993
- 6) 界面支配モデルでは $V = V(x, t)$ が点 x , 時刻 t にも依存しているものを含むが、ここでは、空間、時間の平行移動に不変な方程式のみ考える。
- 7) W. W. Mullins, Two dimensional motion of idealized grain boundaries, J. Appl. Phys. 27(1956) 900-904
- 8) K. A. Brakke, The motion of a surface by its mean curvature, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1978
- 9) a) 儀我美一、陳蘊剛、動く曲面を追いかけて、日本評論社、1996
b) 儀我美一、曲面の発展方程式における等高面の方法、数学 47 (1995), 321-340
c) 儀我美一、動く界面、数学のたのしみ 4(1997), 69-85, 日本評論社
- a) は平均曲率の定義から始まる入門書。c) は a) の内容の簡単な紹介で主曲率の直観的証明を含む。b) は最近の研究の動向の要約である。
- 10) M. Grayson, Shortening embedded curves, Annals of Math. 129 (1989), 71-111
- 11) 荻上鉦一、多様体、共立講座、21世紀の数学 6(1997)
変分問題、特に変分の計算の仕方に関しては次がわかりやすい。
小磯憲史、変分問題、共立講座、21世紀の数学 12(1998)
- 12) P. Topping, Mean curvature flow and geometric inequalities, preprint (ETH, Zürich) (1997)
- 13) G. Huisken and T. Ilmanen, The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality, preprint (1998)
- 14) I. Fonseca, The Wulff Theorem revisited, Proc. Royal Soc. of London 432(1991), 121-145
I. Fonseca and S. Müller, A uniqueness proof for the Wulff Theorem, Proc. Royal Soc. of Edinburgh 199A(1991) 125-136

とその文献リストを参照のこと。数学的に問題を定式にする場合は考える曲面の集合をきちんと述べる必要がある。

15) L. Simon, Lectures on Geometric Measure Theory, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University 3(1983)

16) A. D. Alexandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large I, Vestnik Leningrad Univ. Math. 11(1956) 5-17

2 階楕円型方程式への応用については

倉田和浩・村田實, 偏微分方程式 II 岩波 (1997) を参照のこと。

17) G. Huisken, Flow by mean curvature of convex surface into spheres, J. Differential Geometry 20(1984), 237-266

18) M. Gage and Y. Li, Evolving plane curves by curvature in relative geometries. II., Duke Math. J. 75(1994), 79-98

19) W. K. Allard, A characterization of the area integrand, Symposia Mathematica 14(1974), 429-444

20) C. Dohmen, Y. Giga and N. Mizoguchi, Existence of selfsimilar shrinking curves for anisotropic curvature flow equations, Calc. Var. 4(1996), 102-119

C. Dohmen and Y. Giga, Selfsimilar shrinking curves for anisotropic curvature flow equations, Proc. Japan Acad. 70(1994), 252-255

21) A. Stancu, Uniqueness of self-similar solutions for a crystalline flow, Indiana Univ. Math. J. 45(1996), 1157-1174

22) W. Firey, Shapes of worn stones, Mathematica 21(1974), 1-11

23) 積分を伴う方程式について, 微分方程式の枠組を拡張した統一的な取扱いが, 線形方程式の場合, 擬微分作用素論として知られている。非線形問題では個別的に扱うのが今のところ能率がよい。擬微分作用素論の教科書として

熊ノ郷準, 擬微分作用素, 岩波
が有名である。

24) W. W. Mullins, Theory of thermal grooving, J. Appl. Phys. 28(1957), 333-339

25) ラプラス作用素のスペクトルについて解説してある教科書はこの形又は, それに近い形の定理が説明されている。例えば

溝畑茂, 偏微分方程式論, 岩波

黒田成俊, 関数解析, 共立

を参照せよ。(ii), (iii) に Γ のコンパクト性がきいてくる。(iv) の固有関数が定数しかないことは最大値原理による。

26) W. W. Mullins and R. F. Sekerka, Morphological stability of a particle growing by diffusion or heat flow, J. Appl. Phys. 34(1963), 323-329

27) N. D. Alikakos, P. W. Bates and X. Chen, Convergence of the Cahn-Hilliard equation to the Hele-Shaw model, Arch. Rational Mech. Anal. 128(1994), 165-205

28) ディリクレ問題の可解性の問題は前世紀からの解析学の主要テーマであった。

25) であげた文献でも扱われている。非線形方程式もこめて扱った標準的な教科書として次に挙げる。

D. Gilbarg and N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, 第2版 Springer (1983)

29) 詳しくは 25) や 23) の文献を参照のこと。フーリエ変換の意味づけが超関数論の一つの課題であった。

30) $n = 2$ の場合 a) M. Gage, On an area-preserving evolution equation for plane curves, in Nonlinear Problems in Geometry, (D. M. DeTurck, ed.), Contemp. Math. 51, AMS, Providence (1986) 51-62

$n \geq 3$ の場合 b) G. Huisken, The volume preserving mean curvature flow, J. Reine Angew. Math. 382(1987) 35-48

31) J. Escher, U. F. Mayer and G. Simonett, The surface diffusion flow for immersed hypersurfaces, preprint

32) X. Chen, J. Hong and F. Yi, Existence, uniqueness and regularity of classical solutions of the Mullins-Sekerka problem, Comm. Partial Differential Equations 21(1996), 1705-1727

33) K. Tso, Deforming a hypersurface by its Gauss-Kronecker curvature, Comm. Pure Appl. Math. 38(1985), 867-882

34) Y. Giga and S. Goto, Geometric evolution of phase-boundaries, On the evolution of Phase-Boundaries (M. Gurtin and G. McFadden, eds.), IMA vol. Math. Appl., Vols.43, Springer (1992), pp.51-66

35) 狭義凸を仮定しなくても, 凸性は保たれる。

D. Chopp, L. C. Evans and H. Ishii, Waiting time effects for Gauss curvature flows, preprint

36) U. F. Mayer, One-sided Mullins-Sekerka flow does not preserve convexity, Electronic J. Differential Equation 1993, No.08, (1993) 1-7

- Two-sided Mullins-Sekerka flow does not preserve convexity, preprint (1997)
- 37) Y. Giga and K. Ito, Loss of convexity of simple closed curves moved by surface diffusion, preprint (1998)
- 38) M. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, *J. Differential Geometry* 26(1987), 285-314
- M. Gage and R. Hamilton, The heat equation shrinking convex plane curves, *J. Differential Geometry* 23(1986), 69-96
- 39) Y. Giga and K. Ito, On pinching of curves moved by surface diffusion, *Comm. Appl. Anal.* 2(1998), 393-405
- 40) M. Grayson, A short note on the evolution of a surface by its mean curvature, *Duke Math. J.* 58(1989), 555-558
- 41) J. Escher and G. Simonett, The volume preserving mean curvature flow near spheres, *Proc. Amer. Math. Soc.* 出版予定
- 42) J. Escher and G. Simonett, A center manifold analysis for the Mullins-Sekerka model, *J. Differential Equations*, 出版予定
- 43) D. Aronson, The porous medium equation, In: *Nonlinear Diffusion Problems*, Springer Lecture Notes 1224 (1986) pp.1-46
- 44) T. Fukui and Y. Giga, Motion of a graph by nonsmooth weighted curvature, *Proc. First Congress of Nonlinear Analysis*, Vol.I (V. Lakshmikantham, ed.) de Gruyter, Berlin, 1996, pp.47-56

最近, 多粒界モデルの角変数の満たす方程式にも, この型の方程式が用いられている。非線形半群論の入門および (55) の解の数値計算例をもこめて次を参照されるとよい。

- R. Kobayashi and Y. Giga, Equations with singular diffusivity, *J. Stat. Phys.* 出版予定
- 45) M.-H. Giga and Y. Giga, Evolving graphs by singular weighted curvature, *Arch. Rational Mech. Anal.* 141(1998), 117-198.

Stability of evolving graphs by nonlocal weighted curvature, preprint (1997), *Commun. in Partial Differential Equations* 出版予定

- 46) 次の文献には, 同様な解説がある

儀我美一, 不思議な拡散方程式, *数学* 49(1997), 193-196

- 47) このような考え方は次の 2 論文で独立に提案された。

S. B. Angenent and M. E. Gurtin, Multiphase thermomechanics with interfacial structure II. Evolution of an isothermal interface, *Arch. Rational Mech. Anal.* 108(1989), 323-391

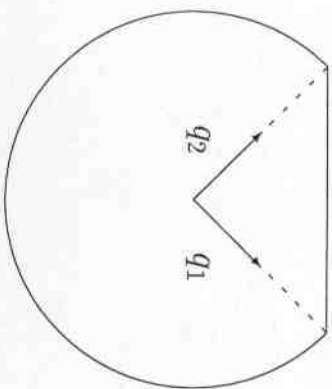
J. Taylor, Constructions and conjectures in crystalline non differential geometry, *Differential Geometry* (B. Lawson and K. Tanenblat eds.), *Proc. of the conference on Differential Geometry*, Rio de Janeiro, Pitmann Monographs in Pure and Appl. Math. 52(1991), 321-336, Pitman, London.

48) P. M. Girão and R. Kohn, Convergence of a crystalline algorithm for the heat equation in one dimension and for the motion of a graph, *Numer. Math.* 67(1994), 41-70

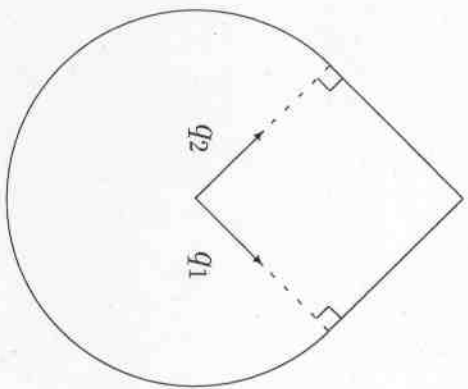
49) Y. Giga, M. E. Gurtin and J. Matias, On the dynamics of crystalline motions, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 15(1998), 7-50

この論文の比較定理の証明中の Lemma 9.6 に誤りがあることがみつかった。実際, 重み付き曲率の比較は面が三角形や平行四辺形でないときは, 一般に成り立たないことが M. Paolini 氏らによって示された。

50) Y. Giga, Motion of a graph by convexified energy, *Hokkaido Math. J.* 23(1994), 185-212



Frank γ_0



Wulff γ_0

图 1

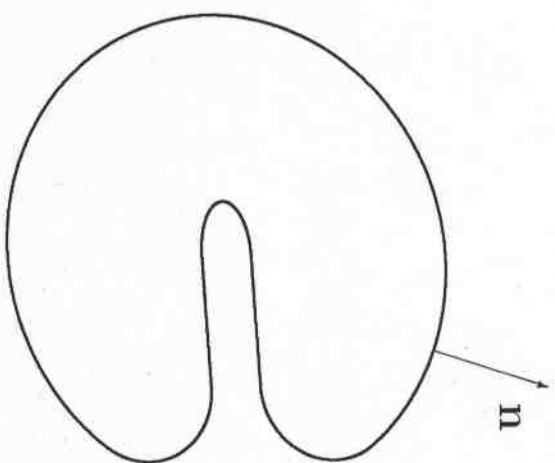


图 2

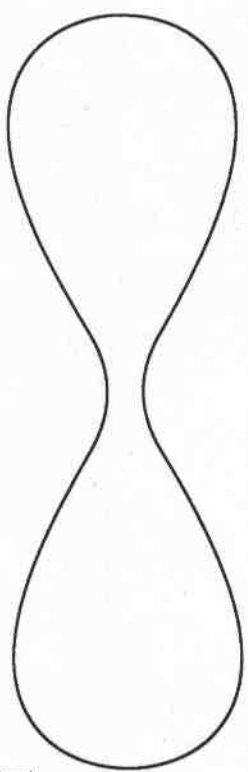


图 3

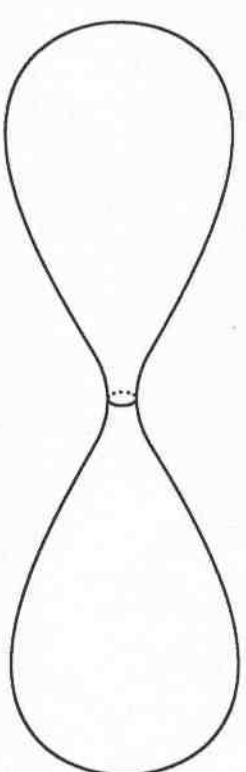


图 4

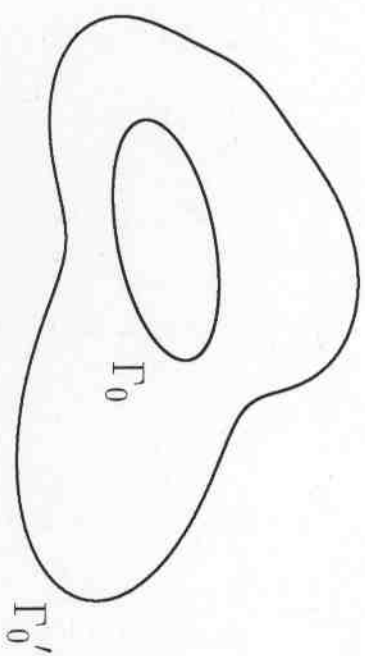


図 5

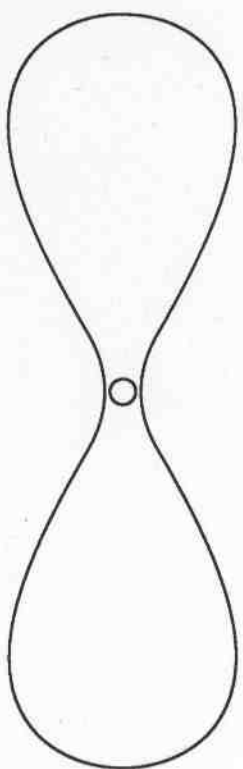


図 6



多孔質型

図 7

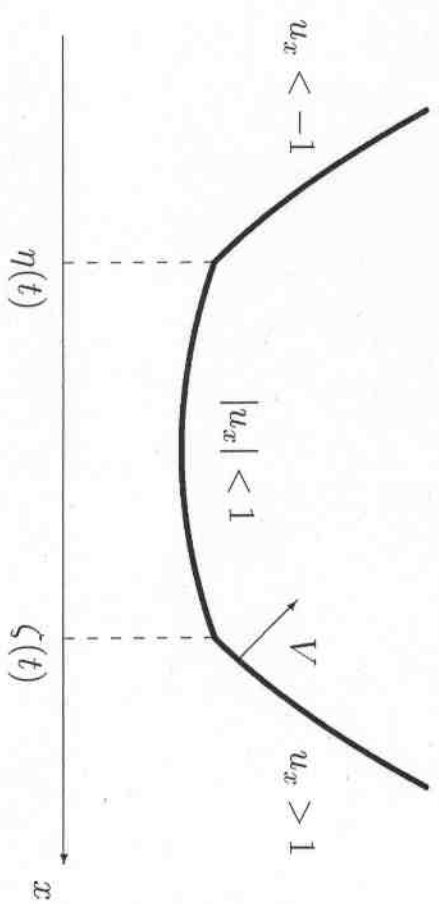


図 8